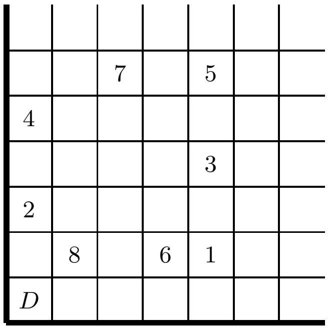
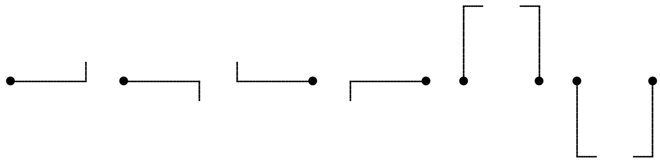
DRAGÕES

Identifiquemos as casas do tabuleiro com pares (i, j) em que $i, j = 0, 1, \ldots, 18$. A distância dragoniana da casa no canto, isto é, na posição $(0, 0)$, até à posição $(1, 1)$ é menor ou igual a 8, conforme mostra a seguinte sequência de movimentos:



Em cada salto o dragão percorre 5 casas, pelo que para chegar à casa (i, j) a partir da casa $(0, 0)$ necessita de pelo menos $\frac{i+j}{5}$ saltos. Portanto, se (i, j) é tal que $i + j \geq 35$, o dragão necessitará de, pelo menos, 7 saltos para lá chegar. Logo, por exemplo, a distância dragoniana d da casa $(0, 0)$ à $(17, 18)$ verifica $d \geq 7$. Mostremos que não pode ser igual a 7. O dragão dispõe de oito tipo de saltos distintos, conforme a orientação de cada percurso (assinala-se a posição inicial do salto com $\bullet$):



Designemos por a, b, c, d, e, f, g e h o número de saltos de cada um dos tipos. A posição final do dragão após estes saltos é (X, Y), com

$$\begin{cases} X = 4(a+b) - 4(c+d) + (e+g) - (f+h) \\ \\ Y = (a+c) - (b+d) + 4(e+f) - 4(g+h). \end{cases}$$

Evidentemente, $d = a+b+c+d+e+f+g+h$. Vejamos agora que não é possível chegar à casa $(17, 18)$ efectuando 7 saltos, o que implicará que $d \geq 8$. Para isso introduzamos as variáveis $v = e + f - g - h$ e $u = a + c - b - d$. As duas equações que identificam a posição final do dragão e a que descreve a distância dragoniana reescrevem-se

$$\begin{cases} 17 = 4(u + 2(b-c)) + (v + 2(g-f)) \\ \\ 18 = u + 4v \\ \\ u + v + 2(c+d+f+h) = 7. \end{cases}$$

Resulta das duas primeiras equações que u é par e que v é ímpar. Mais, da segunda e terceira equações segue-se que $3v = 11 + 2(c+d+e+f)$. Logo, $11 \leq 3v \leq 25$, já que $c + d + e + f \leq 7$. Como v é inteiro, temos então $4 \leq v \leq 8$, pelo que os valores possíveis para v são o 5 e o 7.

Caso $v = 5$. Então $u = -2$ e $c+d+e+f = 2$. Além disso $v = e+f-g-h = 5$, isto é, $e+f = 5+g+h$, pelo que $2 = c+d+e+f = c+d+5+g+h$, o que é impossível, já que c, d, g e h representam contagens.

Caso $v = 7$. Neste caso $u = -10$ e $c + d + e + f = 5$. Da mesma forma que no caso anterior deduz-se que $e + f = 7 + g + h$, pelo que $5 = c + d + e + f = c + d + 7 + g + h$, que também é impossível.

Demonstrámos assim que $d \neq 7$. A equação que é necessário alterar no sistema de equações anterior é apenas a última que passa a ser $u + v + 2(c + d + f + h) = d$. Como as duas primeiras equações se mantêm, a conclusão retirada acima também se mantém verdadeira: u é par e v é ímpar. Neste caso, a equação que exprime a distância dragoniana de $(0, 0)$ à casa $(17, 18)$ implica que d é ímpar, pelo que $d \geq 9$.