

*Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.*

1. Diz-se que um número inteiro positivo n é BOM, se existe uma permutação dos inteiros de 1 a n , (a_1, a_2, \dots, a_n) tal que, para todo o k , $k + a_k$ é um quadrado perfeito. Por exemplo 5 é um número BOM, uma vez que a permutação $(3, 2, 1, 5, 4)$ verifica a condição: $1 + 3 = 2^2$, $2 + 2 = 2^2$, $3 + 1 = 2^2$; $4 + 5 = 3^2$ e $5 + 4 = 3^2$.
Descobre todos os números BONS até 12.
2. Num triângulo $[ABC]$, o ângulo em C é o dobro do ângulo em A . Marca-se um ponto D no lado $[AC]$ de tal modo que $\hat{A}BD = \hat{D}BC$. Sabendo que $\overline{AB} = 10$ e $\overline{CD} = 3$, qual é o comprimento do lado $[BC]$?
3. Dado um subconjunto de $\{1, 2, \dots, n\}$, definimos a sua soma alternada da seguinte forma: ordenamos os elementos do subconjunto por ordem decrescente e, começando com o maior, somamos e subtraímos alternadamente os números sucessivos. Por exemplo, a soma alternada do conjunto $\{1, 3, 4, 6, 8\}$ é $8 - 6 + 4 - 3 + 1 = 4$. Determina a soma das somas alternadas de todos os subconjuntos de $\{1, 2, \dots, 10\}$ com um número ímpar de elementos.
4. Determina a soma de todas as frações da forma $\frac{1}{ab}$, onde $0 < a < b \leq 200$ são números naturais primos entre si tais que $a + b > 200$.