Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Se a é o primeiro termo e $n \geq 1$ é o número de termos da sequência, então a soma dos seus termos é

$$100 = a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+n-1) = an + (1+2+\cdots+(n-1)) = an + \frac{n(n-1)}{2},$$

ou seja, $200/n = 2a + n - 1$.

Portanto, n é um divisor de 200 $= 2^3 \cdot 5^2$, logo $n \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200\}$.

Note-se que, se $n \in \{2, 4, 10, 20, 50, 100\}$, então $200/n$ é par e $2a + n - 1$ é ímpar, pelo que não é possível ter $200/n = 2a + n - 1$. Analisem-se as restantes hipóteses para n. Se $n = 1$, ou $n = 5$, ou $n = 8$, ou $n = 25$, ou $n = 40$, ou $n = 200$, então da equação $200/n = 2a + n - 1$ segue-se que $a = 100$, ou $a = 18$, ou $a = 9$, ou $a = -8$, ou $a = -17$, ou $a = -99$, respetivamente. Obtem-se assim as sequências (100), $(18, 19, 20, 21, 22)$, $(9, 10, \ldots, 16)$, $(-8, -7, \ldots, 16)$, $(-17, -60, \ldots, 22)$ e $(-99, -98, \ldots, 99, 100)$, pelo que existem 6 sequências de inteiros consecutivos cuja soma dos seus termos é igual a 100.

2. Sejam a, b, c, d inteiros positivos. A soma do número $1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$ com o número $1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a$ é igual a

$$N = 1000 \cdot (a+d) + 110 \cdot (b+c) + (a+d),$$

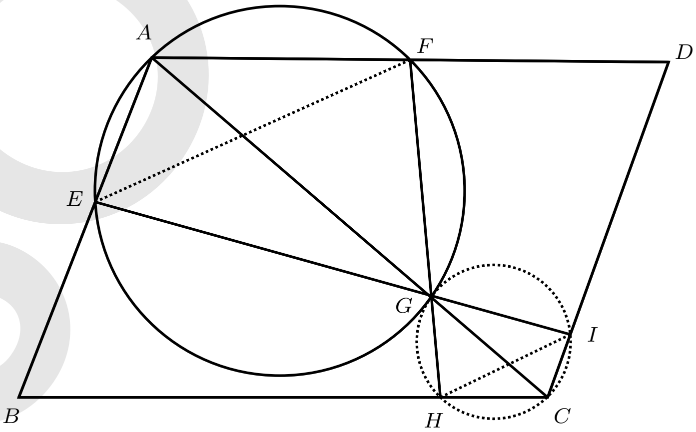
com $2 \leq a+d \leq 18$ e $2 \leq b+c \leq 18$. Para que N tenha 4 algarismos é necessário que $2 \leq a+d \leq 9$. Além disso, note-se que, se $b+c \leq 9$ então $110 \cdot (b+c) \leq 990$ e se $10 \leq b+c \leq 18$ então $1100 \leq 110 \cdot (b+c) \leq 1980$.

Portanto, se $2 \leq a+d \leq 8$, o número N tem 4 algarismos, qualquer que seja a soma $b+c$. Neste caso, há 7 possibilidades para a soma $a+d$ e 17 possibilidades para a soma $b+c$, perfazendo $7 \times 17 = 119$ possíveis números N. Por outro lado, se $a+d = 9$, então para que o número N tenha 4 dígitos é necessário que $2 \leq b+c \leq 9$. Há então neste caso 8 possíveis números N. Assim há um total de $119 + 8 = 127$ números nas condições pretendidas.

3. No quadrilátero $[AEGF]$ inscrito na circunferência referida no enunciado, tem-se $E\hat{G}F = 180^\circ - B\hat{A}D$. O quadrilátero $[CIGH]$ também está inscrito na circunferência que passa por G, I, H e C, uma vez que

$$H\hat{G}I = E\hat{G}F = 180^\circ - B\hat{A}D = 180^\circ - B\hat{C}D = 180^\circ - H\hat{C}I.$$

Por serem ângulos inscritos no mesmo arco, tem-se $G\hat{H}I = G\hat{C}I$ e $G\hat{A}E = G\hat{F}E$. Por serem ângulos alternos internos relativamente às retas paralelas CD e AB, tem-se $G\hat{C}I = G\hat{A}E$. Portanto, $G\hat{H}I = G\hat{F}E$ logo EF é paralela a HI.



4. Sem perda de generalidade, suponhamos que um dos alunos respondeu Falso(F) a todas as questões. Portanto, qualquer um dos outros alunos respondeu Verdadeiro(V) a no mínimo três questões.

   Vamos começar por provar que houve, no máximo, 4 alunos que responderam ao teste com $3V$ e $3F$. Mais uma vez, sem perda de generalidade, podemos supor que um desses alunos respondeu V às três primeiras questões, ou seja respondeu $VVVFFF$, por esta ordem. Se outro aluno respondeu a três perguntas com V e três com F, então respondeu V a uma ou nenhuma das três primeiras questões. Se algum deles respondeu $FFFVVV$ e outro respondeu V a apenas uma das três primeiras questões, por exemplo $VFFVVF$, então estes dois alunos só teriam duas respostas diferentes. Pelo que já foi dito, se dois alunos responderam com $3V$ e $3F$, as suas respostas só podem coincidir num V e logo também só num F. Neste caso, um deles respondeu V à primeira questão, outro V à segunda e outro V à terceira; e o mesmo com F nas quarta, quinta e sexta questões, não necessariamente pela mesma ordem. Temos assim que no máximo houve 4 alunos que responderam com $3V$ e $3F$, por exemplo: $VVVFFF$, $VFFVVF$, $FVFVFV$ e $FFVFVV$.

   De seguida vamos provar que houve, no máximo, 3 alunos que responderam com $4V$ e $2F$. Se dois alunos responderam deste modo, então as duas perguntas a que responderam F têm que ser diferentes; e portanto há no máximo $6 : 2 = 3$ alunos que responderam $4V$ e $2F$.

   Vamos concluir que houve no máximo 8 alunos que fizeram o teste. Continuamos com a suposição que um deles respondeu F a todas as questões. Se algum respondeu V a todas as questões, então todos os outros responderam com $3V$ e $3F$, ou seja haveria no máximo 6 alunos a responder ao teste. Se algum aluno respondeu F a apenas uma questão, então houve no máximo dois alunos que responderam com $4V$ e $2F$, por um raciocínio idêntico ao que foi usado para mostrar que só pode haver 3 alunos que responderam com $4V$ e $2F$, e os outros terão que ter respondido com $3V$ e $3F$. Ou seja, além do aluno que respondeu Falso a todas as questões, há no máximo 4 alunos que responderam com $3V$ e $3F$, e 3 alunos que responderam com $4V$ e $2F$ (ou um deles com $5V$ e $1F$).

   Finalmente, vamos exibir oito conjuntos de respostas, em que cada par de conjuntos difere em pelo menos três respostas, provando assim que o teste poderia ter sido feito por 8 alunos.

$6F$	F	F	F	F	F	F
	V	V	V	F	F	F
$3V+3F$	V	F	F	V	V	F
	F	V	F	V	F	V
	F	F	V	F	V	V
	V	V	F	F	V	V
$4V+2F$	V	F	V	V	F	V
	F	V	V	V	V	F