Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) Uma vez que a soma dos últimos quatro algarismos (todos diferentes) tem de ser igual ao algarismo das dezenas de milhar, a menor soma possível é 6, utilizando os algarismos $0, 1, 2$ e 3. Estes quatro algarismos podem ser distribuídos de qualquer maneira pelas casas das unidades, dezenas, centenas e milhares. Como o número de maneiras de o fazer é $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, temos 24 números com primeiro algarismo 6. Agora só é preciso encontrar, quatro algarismos distintos cuja soma seja um número de 6 a 9.

Soma	Algarismos	Soma	Algarismos
6	$0+1+2+3$	9	$0+1+3+5$
7	$0+1+2+4$	9	$0+2+3+4$
8	$0+1+3+4$	9	$0+1+2+6$
8	$0+1+2+5$		

Para cada um destes 7 conjuntos existem 24 possibilidades, portanto existem $7 \times 24 = 168$ números com estas propriedades.

Opção correta: E).

(b) Observemos primeiro que qualquer potência de base 33 é um número ímpar, e que se subtrairmos a um número ímpar um número par continuamos com um número ímpar. Uma vez que $33^{33} = 33 \times 33^{32} = 33^{32} + 33^{32} + 33^{32} + 33^{32} + \cdots + 33^{32} + 33^{32} = (33^{32} - 32) + (33^{32} - 30) + (33^{32} - 28) + \cdots + (33^{32} - 2) + 33^{32} + (33^{32} + 2) + (33^{32} + 4) + \cdots + (33^{32} + 30) + (33^{32} + 32)$, o maior número que se escreveu foi $33^{32} + 32$.

Opção correta: D).

(c) O maior valor de uma fração é obtido dividindo o maior valor possivel no numerador (que é sempre positivo neste caso) pelo menor valor possível (positivo) no denominador. No denominador, o menor valor positivo é 1 obtido, por exemplo, fazendo $a = 100$, $b = 50$ e $c = 49$, e neste caso a fração tem o valor 199. Uma vez que a tem de ser maior que $b + c$ para que o denominador não seja negativo, verificamos que o valor máximo do numerador é 199, logo o maior valor possível da fração é 199.

Opção correta: D).

(d) Após a primeira transformação, apenas de formas, relativamente ao número de cubos de cada cor, teremos o número inicial menos o número de cubos que se transformaram em esferas mais o número de esferas que se transformaram em cubos. Assim, o número de cubos verdes é

$$1200 - 0,4 \times 1200 + 0,4 \times 400 = 1200 - 480 + 160 = 880$$

e o número de cubos azuis é

$$1400 - 0,4 \times 1400 + 0,4 \times 800 = 1400 - 560 + 320 = 1160.$$

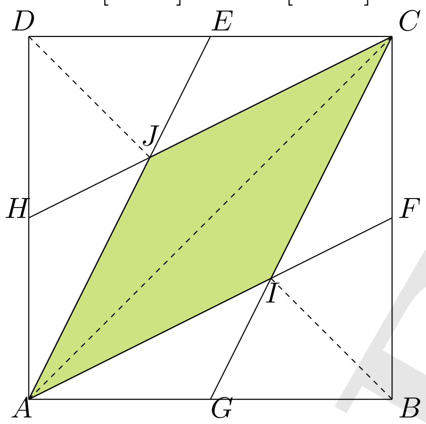
De seguida, vamos subtrair ao número de cubos verdes o número de cubos verdes que mudaram de cor e adicionar o número de cubos azuis que mudaram de cor, ou seja

$$880 - 0,3 \times 880 + 0,3 \times 1160 = 880 - 264 + 348 = 964.$$

Opção correta: D).

5. Os triângulos $[DEJ]$ e $[ECJ]$ têm a mesma área, pois $\overline{ED} = \overline{EC} = 30$. Analogamente conclui-se que a área de $[DJH]$ e a área de $[HJA]$ são iguais. Por outro lado, pelo critério LAL, os triângulos $[DEJ]$ e $[DHJ]$ são congruentes, portanto

$$\text{área } [ECJ] = \text{área } [DEJ] = \text{área } [DHJ] = \text{área } [HJA].$$



A área do triângulo $[DEA]$ é a quarta parte da área do quadrado $[ABCD]$, logo mede $\dfrac{60 \times 60}{4} = 900$. Por outro lado,

$$\text{área } [DEA] = \text{área } [DEJ] + \text{área } [DJH] + \text{área } [HJA] = 3 \times \text{área } [ECJ],$$

logo área $[ECJ] = 300$. Portanto,

$$\text{área } [AJCI] = \text{área } [ABCD] - 8 \times \text{área } [ECJ] = 3600 - 8 \times 300 = 1200\, cm^2.$$

6. Uma vez que todos os números são múltiplos de 1, o número 1 tem de ficar sozinho numa caixa e as potências de 2 ($2, 4$ e 8) têm de ficar em caixas diferentes. Além disso, o número 3 tem necessariamente de ficar na caixa do número 2, pois caso contrário o 6 teria de ficar na caixa restante e não haveria lugar para o 12, que é múltiplo de 2, 3, 4 e 6. De igual forma, o 6 terá necessariamente de ficar na caixa com o número 4 e o 12 na caixa com o 8. Uma vez que 5 e 7 são números primos, podem ficar em qualquer uma das caixas com exceção da que contém o 1. Temos então nove casos possíveis:

(a)	1	2 3 5 7	4 6	8 12
(b)	1	2 3 5	4 6 7	8 12
(c)	1	2 3 5	4 6	8 12 7
(d)	1	2 3 7	4 6 5	8 12
(e)	1	2 3	4 6 5 7	8 12
(f)	1	2 3	4 6 5	8 12 7
(g)	1	2 3 7	4 6	8 12 5
(h)	1	2 3	4 6 7	8 12 5
(i)	1	2 3	4 6	8 12 5 7

Para cada um dos nove casos acima, vamos distribuir os números $10, 14$ e 15. Uma vez que 10 é múltiplo de 2 e 5, 14 é múltiplo de 2 e 7 e 15 é múltiplo de 3 e 5, temos que no caso: (a) há 2 caixas possíveis para o 10, 2 caixas possíveis para o 15 e 2 caixas possíveis para o 14; (b) e (c): há 2 caixas possíveis para o 10, 2 caixas possíveis para o 15 e 1 caixa possível para o 14; (d) e (g): há 1 caixa possível para o 10, 1 caixa possível para o 15 e 2 caixas possíveis para o 14; nos restantes casos há uma única possibilidade para colocar os números $10, 14$ e 15.

Portanto, há um total de 24 possíveis distribuições para os números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14$ e 15. Para cada uma destas distribuições, podemos colocar o número 9 em duas caixas, e cada um dos números primos 11 e 13 em três caixas. Há assim, $24 \times 2 \times 3 \times 3 = 432$ possíveis distribuições para os números de 1 a 15.