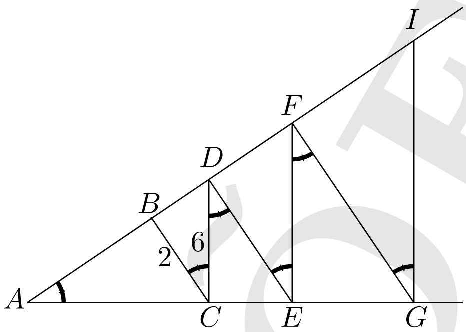
Sugestões para a resolução dos problemas

4. A figura indica os primeiros seis segmentos desenhados pelo Sebastião.



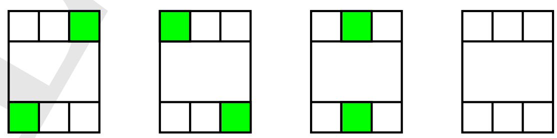
À medida que vai traçando segmentos alternadamente perpendiculares aos lados do ângulo, o Sebastião vai criando triângulos retângulos todos semelhantes entre si, com razão de semelhança igual a

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} = 3.$$

Assim, o terceiro segmento media $\overline{DE} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \times \overline{DC} = 3 \times 6 = 3^2 \times 2$, o quarto media $\overline{EF} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \times \overline{DE} = 3^3 \times 2$, e assim sucessivamente. Portanto o vigésimo segmento media $3^{20-1} \times 2 = 3^{19} \times 2$ cm.

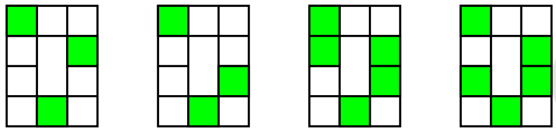
5. Vamos dividir as maneiras de pintar a primeira linha em dois casos: ou há mais casas pintadas de branco ou há mais casas pintadas de verde. O número de maneiras de pintar o tabuleiro é igual em cada caso. Por isso, vamos contar as maneiras de pintar o tabuleiro em que na primeira linha há zero ou um quadrados verdes.

   (a) Se depois de pintarmos a primeira e a última linha, o número de quadrados verdes da primeira e da última coluna também for igual, então há 4 maneiras de pintar a primeira e a última linha.

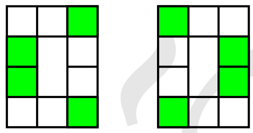


   Para cada um destes casos, há seis maneiras diferentes de pintar os dois quadrados restantes da primeira coluna e os dois quadrados restantes da última coluna: todos de verde, todos de branco e quatro maneiras de pintar um quadrado na primeira e um quadrado na última coluna de cada cor. Há assim $4 \times 6 = 24$ maneiras de colorir o bordo do tabuleiro nestas condições.

(b) Se depois de pintarmos a primeira e a última linha, o número de quadrados verdes na primeira e na última coluna diferem em uma unidade, então há 4 maneiras de pintar a primeira e a última linha. Estas quatro maneiras correspondem a pintar um dos cantos do tabuleiro e o quadrado central da linha oposta de verde, e os restantes quadrados da primeira e da última linha de branco. Para cada um destes casos, há quatro maneiras diferentes de pintar os dois quadrados restantes da primeira coluna e os dois quadrados restantes da última coluna. A figura mostra essas quatro manieras quando o canto superior esquerdo está pintado de verde. Temos assim $4 \times 4 = 16$ maneiras de colorir o bordo do tabuleiro nestas condições.



(c) Se depois de pintarmos a primeira e a última linha, o número de quadrados verdes na primeira e na última coluna diferem em duas unidades, então há apenas duas maneiras de pintar a primeira e a última linha: pintar dois cantos do mesmo lado de verde. Em cada um destes dois casos, só existe uma maneira de pintar os quadrados centrais da primeira e da última coluna.



Os dois quadrados centrais do tabuleiro podem ser pintados de verde ou de branco livremente. Portanto, cada coloração dos restantes quadrados corresponde a quatro maneiras diferentes de pintar o tabuleiro.

Finalmente, podemos concluir que há $4 \times 2 \times (24 + 16 + 2) = 336$ maneiras diferentes de pintar o tabuleiro.

6. Uma vez que $2019 = 224 \times 9 + 3$, o primeiro número da lista é $3\underbrace{9\cdots9}_{224\times}$, que possui 225 algarismos. Não existe mais nenhum número com 225 algarismos na lista com primeiro algarismo 3. Assim, o segundo número da lista é $48\underbrace{9\cdots9}_{223\times}$. Permutando a posição do algarismo 8, obtemos os seguintes 223 números da forma $4\underbrace{9\cdots9}_{N\times}8\underbrace{9\cdots9}_{M\times}$, com $N \geq 1$, $M \geq 0$ e $N + M = 223$. Ou seja, o número na posição $1 + 224$ da nossa lista é $4\underbrace{9\cdots9}_{223\times}8$. Não existe mais nenhum número com 225 algarismos na lista com primeiro algarismo 4. Assim, o número na posição 226 é o $57\underbrace{9\cdots9}_{223\times}$, que é seguido pelos 223 números da forma $58\underbrace{9\cdots9}_{N\times}8\underbrace{9\cdots9}_{M\times}$, com $N, M \geq 0$ e $N+M = 222$, pelo que o número situado na posição $(1+224)+(1+223)$ é o $58\underbrace{9\cdots9}_{222\times}8$. O número seguinte é o $597\underbrace{9\cdots9}_{222\times}$, seguido pelos 222 números da forma $598\underbrace{9\cdots9}_{N\times}8\underbrace{9\cdots9}_{M\times}$, com $N, M \geq 0$ e $N + M = 221$. Ou seja, o número situado na posição $(1 + 224) + (1 + 223) + (1 + 222)$ é o $598\underbrace{9\cdots9}_{221\times}8$.

Repetindo o processo o número de vezes necessário, obtemos uma lista de

$$(1 + 224) + (1 + 223) + (1 + 222) + \cdots + (1 + 216) = 1989$$

números com 225 algarismos cuja soma é 2019, sendo que o $1989^{\underline{o}}$ número é o $5\underbrace{9\cdots9}_{7\times}8\underbrace{9\cdots9}_{215\times}8$. O $1990^{\underline{o}}$ número é $5\underbrace{9\cdots9}_{8\times}7\underbrace{9\cdots9}_{215\times}$, seguido por $5\underbrace{9\cdots9}_{8\times}88\underbrace{9\cdots9}_{214\times}$, pelo que o $2019^{\underline{o}}$ número da lista é

$$5\underbrace{9\cdots9}_{8\times}8\underbrace{9\cdots9}_{28\times}8\underbrace{9\cdots9}_{186\times}.$$