XXXVII OPM - Final - 1º Dia - 05.04.2019 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Um quadrado com medida da área igual a $5^4 = (5^2)^2 = 25^2\,\mathrm{mm}^2$, tem a medida do lado igual a $25\,\mathrm{mm}$. Do mesmo modo, um quadrado com área de $4^5 = (2^2)^5 = (2^5)^2 = 32^2\,\mathrm{mm}^2$ tem $32\,\mathrm{mm}$ de lado. O José desenhou quadrados com 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31 e $32\,\mathrm{mm}$ de lado, e portanto desenhou 8 quadrados.

   Opção correta: B).

   (b) Começamos por observar que o algarismo das unidades de uma potência de 11 é sempre 1. Se multiplicarmos uma dessas potências novamente por 11, o algarismos das dezenas da nova potência é igual ao da potência anterior mais uma unidade, caso esse algarismo não seja 9, ou igual a 0, caso contrário. Uma vez que o algarismos das dezenas de 11^1 é igual a 1, podemos concluir que o algarismo das dezenas de 11^a é igual ao algarismo das unidades de a. Portanto, o algarismo das dezenas de 11^{2019} é 9.

   Opção correta: E).

   (c) Designemos por r o raio do círculo verde, e portanto cada quadrado tem lado $2r$. A área do círculo verde é $\pi\, r^2$. Calculemos agora a área de cada uma das quatro regiões pintadas a azul.

   A primeira é composta por quatro círculos iguais com raio $\frac{r}{2}$, e portanto a área total é $4 \times \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = 4\pi\frac{r^2}{4} = \pi\, r^2$. De modo idêntico, a última figura é composta por 16 círculos de raio $\frac{r}{4}$ e a sua área total é $16 \times \pi \left(\frac{r}{4}\right)^2 = \pi\, r^2$.

   As restantes duas figuras são compostas por quartos de círculo. A segunda figura azul é um quarto de círculo com raio igual a $2r$ e portanto a sua área é $\frac{1}{4}\pi(2r)^2 = \pi\, r^2$. A terceira figura é composta por quatro quartos de círculo com raio igual à do círculo verde, tendo assim exatamente a mesma área do que esse círculo.

   Concluímos assim que todas as figuras têm a mesma área pintada.

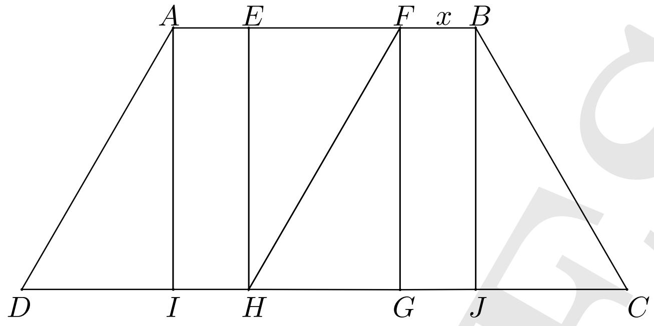
   Opção correta: E).

   (d) Um número é múltiplo de 5 se terminar em 0 ou em 5. Como o primeiro algarismo é igual ao último, e não pode ser 0, o último algarismo (e o primeiro) de um número especial é 5. Como o resto da divisão de um número especial por 4 é igual a 3, o mesmo acontece para o número composto pelos seus dois últimos algarismos, ou seja um número especial acaba em: 15, 35, 55, 75 ou 95. Só falta descobrir o algarismo do meio da capicua, mas como o resto da divisão por 3 é igual a 2, a soma dos cinco algarismos de um número especial também tem essa propriedade. Sendo assim, para cada escolha possível dos dois últimos algarismos há três ou quatro números especiais, conforme o caso: 51215, 51515, 51815; 53135, 53435, 53735; 55055, 55355, 55655, 55955; 57275, 57575, 57875; 59195, 59495, 59795.

   Opção correta: D).

2. A figura seguinte representa apenas metade de uma das toalhas. O trapézio $[BCHF]$ representa a parte da toalha que está sobreposta com a outra toalha. Os segmentos $[AI]$, $[EH]$, $[FG]$ e $[BJ]$ são alturas do trapézio $[ABCD]$. Designando por x o comprimento de $[FB]$, o lado maior da mesa mede

$$2 \times 80 - x = 160 - x.$$



Observe-se que $[AFHD]$ é um paralelogramo e $\overline{AE} = \overline{IH}$, por isso $\overline{EF} = \overline{DI}$.

Como o hexágono é regular, os triângulos $[BCJ]$ e $[ADI]$ são congruentes, logo $\overline{DI} = \overline{JC}$. Além disso, $\overline{DC} = 2 \times 80 = 160$. Assim,

$$\overline{DC} = \overline{DI} + \overline{IJ} + \overline{JC} = 160$$

e, como $\overline{IJ} = 80$, conclui-se que $\overline{DI} + \overline{JC} = 80$. Tendo em conta que $\overline{DI} = \overline{IJ}$, tem-se $\overline{DI} = 40$. Ou seja,

$$\overline{DI} = \overline{EF} = \overline{HG} = \overline{JC} = 40.$$

Tendo em conta que a área de $[AFHD]$ é igual à área de $[FBCH]$, observa-se que os quadriláteros $[AEHI]$ e $[FBJG]$ têm a mesma área e assim conclui-se que $\overline{AE} = \overline{FB} = x$.

Olhando para uma das bases do trapézio $[ABCD]$, conclui-se que $x + x = 40$, ou seja, $x = 20$. Portanto, o lado maior da mesa mede $160 - x = 160 - 20 = 140\,cm$.

3. **Solução 1:** Um tabuleiro com 11 linhas e 18 colunas é mágico porque tem $11 \times 18 = 198$ quadrículas e $1 + 9 + 8 = 18$.

Suponhamos agora que um tabuleiro mágico tem 10 ou menos linhas.

Esse tabuleiro tem no máximo $9 + 9 + 9 = 27$ colunas, portanto tem no máximo $10 \times 27 = 270$ quadrículas.

Assim, esse tabuleiro tem no máximo $1 + 9 + 9 = 19$ colunas, logo tem no máximo $10 \times 19 = 190$ quadrículas.

Assim, esse tabuleiro tem no máximo $1 + 8 + 9 = 18$ colunas, logo tem no máximo $10 \times 18 = 180$ quadrículas.

Repetindo sucessivamente este raciocínio, concluímos que o tabuleiro tem no máximo 100 quadrículas, o que é impossível com 10 ou menos linhas.

Portanto, o número mínimo de linhas de um tabuleiro mágico é 11.

Solução 2: Um tabuleiro com 11 linhas e 18 colunas é mágico porque tem $11 \times 18 = 198$ quadrículas e $1 + 9 + 8 = 18$.

Suponhamos agora que um tabuleiro mágico tem $n \leq 10$ linhas.

Sejam a, b e c os algarismos do número de quadrículas de um tabuleiro mágico. Então

$$100a + 10b + c = n(a + b + c) \leq 10a + 10b + 10c.$$

Logo $90 \leq 90a \leq 9c \leq 81$, contradição.

Portanto, o número mínimo de linhas de um tabuleiro mágico é 11.