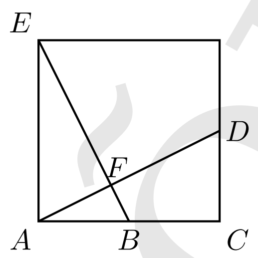
XXXVII OPM - Final - 1º Dia - 05.04.2019 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Como os triângulos $[ABE]$ e $[CDA]$ da figura são congruentes, então $A\widehat{B}E = C\widehat{D}A$. Logo os triângulos $[ABF]$ e $[ADC]$ têm dois ângulos iguais, pelo que são semelhantes, com razão de semelhança $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$.



Pelo Teorema de Pitágoras, temos $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = 10^2 + 5^2 = 125$, logo a razão de semelhança anterior é $\dfrac{5}{\sqrt{125}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Assim,

$$\text{área}[ABF] = \frac{\text{área}[ADC]}{5} = \frac{25}{5} = 5\,\text{cm}^2.$$

Portanto, a área colorida mede $10^2 - 8 \times 5 = 60$ cm^2.

2. Nenhum dos algarismos de um número equilibrado pode ser 0. Suponhamos que os algarismos a, b, c, d e e de um número equilibrado estão ordenados por ordem não-decrescente $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Como

$$d - a = (b + c + d) - (a + b + c) \text{ é divisível por } e$$

e

$$d - a < d \leq e$$

então, necessariamente, $d - a = 0$. Logo $a \leq b \leq c \leq d = a$, pelo que

$$a = b = c = d.$$

Ou seja, num número equilibrado há, no máximo, 2 algarismos distintos sendo que o menor deles aparece pelo menos 4 vezes. Se os 5 algarismos forem todos iguais, o número é claramente equilibrado e temos 9 números equilibrados desta forma: $11111, \ldots, 99999$. Se os algarismos do número forem a, a, a, a e e, com $a < e$, então o número é equilibrado se e só se

$$\left\{\begin{array}{l} a \text{ divide } 3a = a + a + a \\ a \text{ divide } 2a + e = a + a + e \\ a \text{ divide } a + 2e = a + e + e \\ e \text{ divide } 3a = a + a + a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \text{ divide } e \\ a \text{ divide } 2e \\ e \text{ divide } 3a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \text{ divide } e \\ e \text{ divide } 3a \end{array}\right.$$

Assim, o algarismo e tem de ser um múltiplo de a que divide $3a$. De $a < e$ vem que $e = 3a$ e os valores possíveis para o algarismo a são 1, 2 e 3 a que correspondem os valores 3, 6 e 9, respetivamente, para o algarismo e. Deste modo, concluímos que os números 11113, 22226 e 33339 e todos os que se obtêm destes por permutação dos seus algarismos são os números equilibrados com dois algarismos distintos.

Existem, no total, $9 + 15 = 24$ números equilibrados.

3. Seja N um número obtido de $n!$ pela substituição de um ou mais fatores k por $k!$. O número N é um quadrado perfeito se e só se na fatorização de N em números primos, o expoente de cada número primo é par.

   Se n é um número primo, então, para qualquer número N obtido pela substituição de um ou mais fatores k por $k!$, o expoente de n na fatorização de N em números primos é 1, logo N não é um quadrado perfeito.

   Se n é um número composto, seja $N = n!$ e p o maior número primo com expoente ímpar na decomposição de N em números primos.

   Como n é composto, tem-se $p + 1 \leq n$ e substituindo o fator $p + 1$ por $(p + 1)!$, adiciona-se 1 ao expoente de p. Logo o expoente de p na nova expressão é par. Como o expoente de cada primo maior que p não é alterado, se a nova expressão N não for um quadrado perfeito, o maior número primo com expoente ímpar na decomposição de N em números primos é inferior a p.

   Repetindo sucessivamente este procedimento, eventualmente todos os expoentes ficam pares, obtendo-se um quadrado perfeito.

   Portanto os naturais n nas condições do enunciado são os números compostos.