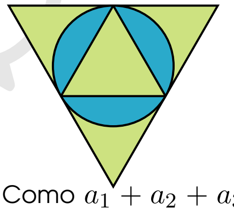
Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

*Sugestões para a resolução dos problemas*

1. (a) O lado do triângulo do logótipo do José é o mesmo do da figura ao lado, onde é claro que o triângulo menor tem metade do lado do triângulo maior.
Opção correta: C).



(b) Sejam $a_1$, $a_2$, ..., $a_{10}$ os algarismos da senha, pela ordem em que aparecem. Como $a_1 + a_2 + a_3$ e $a_2 + a_3 + a_4$ são ambos múltiplos de $3$, então a sua diferença $a_4 - a_1$ também é. Logo $a_1$ e $a_4$ têm o mesmo resto na divisão por $3$. Do mesmo modo se conclui que $a_1$, $a_4$, $a_7$ e $a_{10}$ têm o mesmo resto na divisão por $3$. Como são algarismos, têm que ser $0, 3, 6$ e $9$. Como a ordem destes algarismo é qualquer, temos $4 \times 3 \times 2 = 2^3 \times 3$ possibilidades.

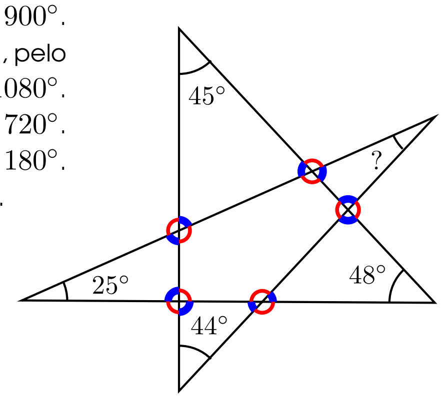
Também $\{a_2, a_5, a_8\}$ e $\{a_3, a_6, a_9\}$ são conjuntos onde os elementos têm o mesmo resto na divisão por $3$, logo são $\{1, 4, 7\}$ e $\{2, 5, 8\}$ (por uma ordem qualquer). Portanto, ao todo há $2 \times (3 \times 2)^2 = 2^3 \times 3^2$ possibilidades. Assim, ao todo, há $(2^3 \times 3) \times (3^2 \times 2^3) = 2^6 \times 3^3$ possibilidades.

Opção correta: E).

(c) Um número é múltiplo de $5$ se terminar em $0$ ou em $5$. Como o primeiro algarismo é igual ao último, e não pode ser $0$, o último algarismo (e o primeiro) de um número especial é $5$. Como o resto da divisão de um número especial por $4$ é igual a $3$, o mesmo acontece para o número composto pelos seus dois últimos algarismos, ou seja um número especial acaba em: $15$, $35$, $55$, $75$ ou $95$. Só falta descobrir o algarismo do meio da capicua, mas como o resto da divisão por $3$ é igual a $2$, a soma dos cinco algarismos de um número especial também tem essa propriedade. Sendo assim, para cada escolha possível dos dois últimos algarismos há três ou quatro números especiais, conforme o caso: $51215$, $51515$, $51815$; $53135$, $53435$, $53735$; $55055$, $55355$, $55655$, $55955$; $57275$, $57575$, $57875$; $59195$, $59495$, $59795$.

Opção correta: D).

(d) A soma dos ângulos dos cinco triângulos da figura é $5 \times 180 = 900°$. Por outro lado, a soma dos ângulos internos do pentágono é $540°$, pelo que a soma dos ângulos assinalados a vermelho é $2 \times 540 = 1080°$. Logo, a soma dos ângulos assinalados a azul é $5 \times 360 - 1080 = 720°$. Portanto, a soma dos ângulos dos vértices da estrela é $900 - 720 = 180°$. Logo, a amplitude pretendida é $180 - 45 - 25 - 44 - 48 = 18°$.
Opção correta: B).



2. **Solução 1:** Um tabuleiro com $11$ linhas e $18$ colunas é mágico porque tem $11 \times 18 = 198$ quadrículas e $1+9+8=18$.

   Suponhamos agora que um tabuleiro mágico tem $10$ ou menos linhas.

   Esse tabuleiro tem no máximo $9+9+9=27$ colunas, portanto tem no máximo $10 \times 27 = 270$ quadrículas.

   Assim, esse tabuleiro tem no máximo $1+9+9=19$ colunas, logo tem no máximo $10 \times 19 = 190$ quadrículas.

   Assim, esse tabuleiro tem no máximo $1+8+9=18$ colunas, logo tem no máximo $10 \times 18 = 180$ quadrículas.

   Repetindo sucessivamente este raciocínio, concluímos que o tabuleiro tem no máximo $100$ quadrículas, o que é impossível com $10$ ou menos linhas.

   Portanto, o número mínimo de linhas de um tabuleiro mágico é $11$.

   **Solução 2:** Um tabuleiro com $11$ linhas e $18$ colunas é mágico porque tem $11 \times 18 = 198$ quadrículas e $1+9+8=18$.

   Suponhamos agora que um tabuleiro mágico tem $n \leq 10$ linhas.

   Sejam $a$, $b$ e $c$ os algarismos do número de quadrículas de um tabuleiro mágico. Então

   $$100a + 10b + c = n(a+b+c) \leq 10a + 10b + 10c.$$

   Logo $90 \leq 90a \leq 9c \leq 81$, contradição.

   Portanto, o número mínimo de linhas de um tabuleiro mágico é $11$.

3. Nenhum dos algarismos de um número equilibrado pode ser $0$. Suponhamos que os algarismos $a, b, c, d$ e $e$ de um número equilibrado estão ordenados por ordem não-decrescente $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Como

   $$d - a = (b+c+d) - (a+b+c) \text{ é divisível por } e$$

   e

   $$d - a < d \leq e$$

   então, necessariamente, $d - a = 0$. Logo $a \leq b \leq c \leq d = a$, pelo que

   $$a = b = c = d.$$

   Ou seja, num número equilibrado há, no máximo, $2$ algarismos distintos sendo que o menor deles aparece pelo menos $4$ vezes. Se os $5$ algarismos forem todos iguais, o número é claramente equilibrado e temos $9$ números equilibrados desta forma: $11111, \ldots, 99999$. Se os algarismos do número forem $a, a, a, a$ e $e$, com $a < e$, então o número é equilibrado se e só se

   $$\begin{cases} a \text{ divide } 3a = a+a+a \\ a \text{ divide } 2a+e = a+a+e \\ a \text{ divide } a+2e = a+e+e \\ e \text{ divide } 3a = a+a+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ divide } e \\ a \text{ divide } 2e \\ e \text{ divide } 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ divide } e \\ e \text{ divide } 3a \end{cases}$$

   Assim, o algarismo $e$ tem de ser um múltiplo de $a$ que divide $3a$. De $a < e$ vem que $e = 3a$ e os valores possíveis para o algarismo $a$ são $1$, $2$ e $3$ a que correspondem os valores $3$, $6$ e $9$, respetivamente, para o algarismo $e$. Deste modo, concluímos que os números $11113$, $22226$ e $33339$ e todos os que se obtêm destes por permutação dos seus algarismos são os números equilibrados com dois algarismos distintos.

   Existem, no total, $9 + 15 = 24$ números equilibrados.