OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

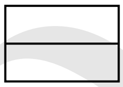
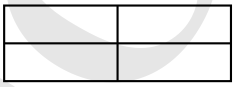
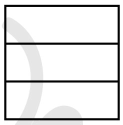
http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXVI OPM - Final - 1º Dia - 23.03.2018 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

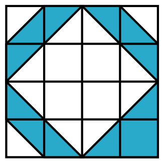
Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Vamos contar os retângulos de diferentes tamanhos que podemos distinguir na figura:

altura $\times$ comprimento	desenho	número
1×1		7
1×2		4
2×1		4
1×3		1
2×2		2
3×1		1
	Total	19

Opção correta: D).

(b) Consideremos um quadrado de lado 4 cm, parcialmente colorido, e dividido em 16 quadradinhos de lado 1 cm, como se vê na figura ao lado.



A área colorida ocupa 13 metades destes quadradinhos e, portanto, mede $\frac{13}{2}\ \mathrm{cm}^2$. Dado que a figura original corresponde a quatro cópias deste quadrado, a área colorida na figura do enunciado mede $4 \times \frac{13}{2} = 26\ \mathrm{cm}^2$.

Opção correta: B).

(c) Como o número de crianças é o triplo dos restantes temos 90 crianças e 30 adultos. Os bilhetes para as 90 crianças custaram $90 \times 10 = 900$€, o que corresponde a metade do total gasto em bilhetes. Então os 30 bilhetes para adultos também custaram 900€. Se os 30 bilhetes de adulto fossem comprados com desconto teriam custado $30 \times 20 = 600$€. Dado que a diferença entre o preço do bilhete normal e o do bilhete com desconto é $50 - 20 = 30$€, concluímos que 10 adultos tiveram de comprar o bilhete normal porque $600 + 10 \times 30 = 900$€. Verifica-se de facto que a compra de 10 bilhetes normais e 20 bilhetes com desconto totalizam 900€: $10 \times 50 + 20 \times 20 = 500 + 400 = 900$€.
Opção correta: C).

(d) Aparecem 10 letras diferentes nessa adição: A, G, H, I, J, L, N, O, S e T, logo, como letras diferentes correspondem a algarismos diferentes, temos de usar os 10 algarismos $0, 1, 2, \ldots, 9$. Tem-se $\mathsf{O} = 0$ e, como $99999 + 99999 < 200000$, tem-se $\mathsf{A} = 1$.

Como O e $\mathsf{U} + \mathsf{U}$ são pares, então não há transporte para a coluna $\mathsf{U} + \mathsf{U} = \mathsf{O}$, ou seja, logo $\mathsf{U} + \mathsf{U} = 0$ ou $\mathsf{U} + \mathsf{U} = 10$. Como todas as letras correspondem a números diferentes, tem-se $\mathsf{U} = 5$. Assim, a adição pode ser separada em duas partes:

$$\begin{array}{rrr} & \mathsf{J} & 5 \\ + & \mathsf{J} & 5 \\ \hline 1 & \mathsf{G} & 0 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rrrr} & \mathsf{N} & \mathsf{H} & 0 \\ + & \mathsf{L} & \mathsf{H} & 0 \\ \hline & \mathsf{S} & \mathsf{T} & 0 \end{array} .$$

Como $\mathsf{J} + \mathsf{J} + 1 > 9$, temos $\mathsf{J} \geq 5$. Dado que $\mathsf{U} = 5$, há quatro hipóteses para J:

$$\begin{array}{lllll} \mathsf{J} = 6 & \Longrightarrow & 6+6+1 = 13 & \Longrightarrow & \mathsf{G} = 3 \\ \mathsf{J} = 7 & \Longrightarrow & 7+7+1 = 15 & \Longrightarrow & \mathsf{G} = 5 \quad (\text{Impossível porque } \mathsf{U} = 5 \text{ e } \mathsf{U} \neq \mathsf{G}) \\ \mathsf{J} = 8 & \Longrightarrow & 8+8+1 = 17 & \Longrightarrow & \mathsf{G} = 7 \\ \mathsf{J} = 9 & \Longrightarrow & 9+9+1 = 19 & \Longrightarrow & \mathsf{G} = 9 \quad (\text{Impossível porque } \mathsf{J} \neq \mathsf{G}) \end{array}$$

$1^{\underline{o}}$ caso – $\mathsf{J} = 6$ e $\mathsf{G} = 3$:

Na adição

$$\begin{array}{rrrr} & \mathsf{N} & \mathsf{H} & \mathsf{O} \\ + & \mathsf{L} & \mathsf{H} & \mathsf{O} \\ \hline & \mathsf{S} & \mathsf{T} & \mathsf{O} \end{array}$$

falta atribuir um valor às letras J, L, N, S e T de entre os valores $2, 4, 7, 8$ e 9. Como T tem de ser par, só pode tomar os valores $2, 4$ ou 8. A análise dos diferentes casos é feita abaixo.

$$\mathsf{T} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \begin{array}{ll} \mathsf{H} = 1 & (\text{Impossível porque } \mathsf{A} = 1) \\ & \\ \mathsf{H} = 6 & (\text{Impossível porque } \mathsf{J} = 6) \end{array} \right.$$

$$\mathsf{T} = 4 \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \begin{array}{llll} \mathsf{H} = 2 & \Longrightarrow & \begin{array}{l} \mathsf{N} + \mathsf{L} = \mathsf{S} \\ \text{com } 7, 8, 9 \end{array} & (\text{Impossível}) \\ & & & \\ \mathsf{H} = 7 & \Longrightarrow & \begin{array}{l} \mathsf{N} + \mathsf{L} + 1 = \mathsf{S} \\ \text{com } 2, 8, 9 \end{array} & (\text{Impossível}) \end{array} \right.$$

$$\mathsf{T} = 8 \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \begin{array}{llll} \mathsf{H} = 4 & \Longrightarrow & \begin{array}{l} \mathsf{N} + \mathsf{L} = \mathsf{S} \\ \text{com } 2, 7, 9 \end{array} & \left\langle \begin{array}{l} \mathsf{N} = 2, \mathsf{L} = 7, \mathsf{S} = 9 \\ \\ \mathsf{N} = 7, \mathsf{L} = 2, \mathsf{S} = 9 \end{array} \right. \\ \mathsf{H} = 9 & \Longrightarrow & \begin{array}{l} \mathsf{N} + \mathsf{L} + 1 = \mathsf{S} \\ \text{com } 2, 4, 7 \end{array} & \left\langle \begin{array}{l} \mathsf{N} = 2, \mathsf{L} = 4, \mathsf{S} = 7 \\ \\ \mathsf{N} = 4, \mathsf{L} = 2, \mathsf{S} = 7 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

<u>2º caso</u> – J $= 8$ e G $= 7$:

Analogamente ao caso anterior, falta atribuir um valor às letras H, L, N, S e T de entre os valores $2, 3, 4, 6$ e 9. Como T tem de ser par, só pode tomar os valores $2, 4$ ou 6. A análise dos diferentes casos é feita abaixo.

$$\mathsf{T} = 2 \implies \begin{cases} \mathsf{H} = 1 & \text{(Impossível porque } \mathsf{A} = 1\text{)} \\ \mathsf{H} = 6 \implies \begin{array}{l} \mathsf{N} + \mathsf{L} + 1 = \mathsf{S} \\ \text{com } 3, 4, 9 \end{array} & \text{(Impossível)} \end{cases}$$

$$\mathsf{T} = 4 \implies \begin{cases} \mathsf{H} = 2 \implies \begin{array}{l} \mathsf{N} + \mathsf{L} = \mathsf{S} \\ \text{com } 3, 6, 9 \end{array} & \begin{cases} \mathsf{N} = 3, \mathsf{L} = 6, \mathsf{S} = 9 \\ \mathsf{N} = 6, \mathsf{L} = 3, \mathsf{S} = 9 \end{cases} \\ \mathsf{H} = 7 & \text{(Impossível porque } \mathsf{G} = 7\text{)} \end{cases}$$

$$\mathsf{T} = 6 \implies \begin{cases} \mathsf{H} = 3 \implies \begin{array}{l} \mathsf{N} + \mathsf{L} = \mathsf{S} \\ \text{com } 2, 4, 9 \end{array} & \text{(Impossível)} \\ \mathsf{H} = 8 & \text{(Impossível porque } \mathsf{J} = 8\text{)} \end{cases}$$

Logo, há 6 formas diferentes de o Artur escrever a adição do enunciado.

Opção correta: D).

2. Como $2018 = 18 \times 1 + 20 \times 100$, o João pode ter recebido 1 saco de 18 amêndoas e 100 de 20. O mínimo múltiplo comum de 18 e 20 é $180 = 9 \times 20 = 10 \times 18$. Assim, 9 sacos de 20 amêndoas podem ser trocados por 10 sacos de 18, 2×9 sacos de 20 amêndoas por 2×10 sacos de 18, $\ldots$, 11×9 sacos de 20 amêndoas podem ser trocados por 11×10 sacos de 18. Portanto o João pode ter recebido $1, 11, \ldots, 111$ sacos de 18 amêndoas.

3. No primeiro salto, o Pulão percorreu 3 mm, no segundo salto percorreu $3 + 13$ mm, no terceiro percorreu $3 + 2 \times 13$ mm, e assim sucessivamente, tendo no n-ésimo salto percorrido $3 + (n - 1) \times 13$ mm. Uma vez que $2018 = 3 + (156 - 1) \times 13$, concluímos que no 156° salto o Pulão percorreu 2018 mm, igualando o comprimento dos saltos do Saltão.

   A partir do 156° salto, o Pulão começou a recuperar terreno em cada salto. No 157° salto, o Pulão recuperou o que perdeu no 155° salto, no 158° salto, o Pulão recuperou o que perdeu no 154° salto, e assim sucessivamente, até ao salto número $156 + 155 = 311$, em que recuperou o que perdeu no 1° salto.