XXXVI OPM - 2ª Eliminatória - 10.01.2018 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D.
   (b) Opção C.
   (c) Opção C.
   (d) Opção B.

2. A média das idades das irmãs da Paula é 7, o que significa que a soma das idades das suas quatro irmãs é $4 \times 7 = 28$. Duas das suas irmãs têm menos do que 7 anos e as suas idades são números pares não nulos. Existem portanto três hipóteses, as duas irmãs mais novas têm: 4 e 6 anos, 2 e 6 anos ou 2 e 4 anos.

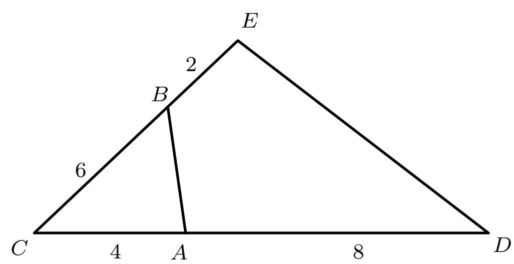
   Se tiverem 4 e 6 anos, a soma das idades das duas restantes irmãs é $28 - 4 - 6 = 18$, portanto uma delas tem 10 anos e a outra 8 anos. O dobro de 4 é 8 mas a diferença entre 10 e 6 é igual 4, logo esta não é uma solução possível.

   Se tiverem 2 e 6 anos, a soma das idades das duas restantes irmãs é $28 - 2 - 6 = 20$, portanto uma delas tem 12 anos e a outra 8 anos. O dobro de 6 é 12 mas a diferença entre 8 e 2 é igual a 6, logo esta também não é uma solução possível.

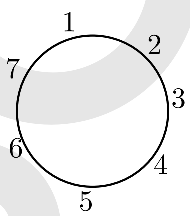
   Resta verificar o caso em que uma das irmãs tem 2 anos e outra tem 4 anos. A soma das idades das duas restantes irmãs é $28 - 4 - 2 = 22$, portanto neste caso temos que considerar duas hipóteses: as duas irmãs mais velhas têm 12 e 10 anos, ou têm 14 e 8 anos. No primeiro caso temos que 4 é o dobro de 2 e que $12 - 10 = 2$, o que significa que esta é uma solução possível. No segundo caso teríamos que as quatro irmãs têm $2, 4, 8$ e 14 anos e destes números apenas 2 e 4 estão a uma diferença de duas unidades, mas 14 não é o dobro de 8.

   Conclui-se que é possível descobrir a idade das irmãs: a Eduarda tem 2 anos, a Ana tem 4 anos, a Rosa tem 10 anos e a Sandra tem 12 anos.

3. Os triângulos $[ABC]$ e $[ADB]$ têm a mesma altura relativamente ao vértice B. Como a base de $[ADB]$ é o dobro do base de $[ABC]$, a área do triângulo $[ADB]$ mede o dobro da área do triângulo $[ABC]$, logo mede 6 cm^2. Assim, a área do triângulo $[BCD]$ mede $3+6 = 9$ cm^2. Por outro lado, os triângulos $[BCD]$ e $[BDE]$ têm a mesma altura relativamente ao vértice D. Como a base de $[BDE]$ é a terça parte da base de $[BCD]$, a área do triângulo $[BDE]$ mede um terço da área do triângulo $[BCD]$, logo mede 3 cm^2. Finalmente, a área do triângulo $[CDE]$ mede $3 + 6 + 3 = 12$ cm^2.



4. Designem-se os sete amigos por $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, e considere-se que eles estão sentados de acordo com a figura:



   O número máximo de amigos que o grupo pode ter é 3. Para haver um grupo com 4 pessoas seriam necessárias pelo menos 8 pessoas uma vez que por cada pessoa escolhida a pessoa à sua esquerda não pode ser escolhida. A lista seguinte indica todos os possíveis grupos com um ou dois elementos. O sinal $\times$ identifica um grupo em que os seus elementos estão sentados lado a lado. O sinal $-$ identifica um grupo já considerado numa linha anterior da tabela.

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\{1\}$	$\times$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{1,5\}$	$\{1,6\}$	$\times$
2	$-$	$\{2\}$	$\times$	$\{2,4\}$	$\{2,5\}$	$\{2,6\}$	$\{2,7\}$
3	$-$	$-$	$\{3\}$	$\times$	$\{3,5\}$	$\{3,6\}$	$\{3,7\}$
4	$-$	$-$	$-$	$\{4\}$	$\times$	$\{4,6\}$	$\{4,7\}$
5	$-$	$-$	$-$	$-$	$\{5\}$	$\times$	$\{5,7\}$
6	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\{6\}$	$\times$
7	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\{7\}$

No total há $7+4+4+3+2+1=21$ possibilidades.

Observe-se que escolher um grupo de três amigos, nas condições do problema, equivale a escolher os dois amigos sentados lado a lado que não pertencem ao grupo. Por exemplo o grupo $\{2,4,6\}$ corresponde à escolha do par $\{1,7\}$. Portanto, há 7 possibilidades para os grupos com três amigos: $\{1,3,5\}$, $\{1,3,6\}$, $\{1,4,6\}$, $\{2,4,6\}$, $\{2,4,7\}$, $\{2,5,7\}$ e $\{3,5,7\}$.

No total há 28 grupos nas condições indicadas.