Sugestões para a resolução dos problemas

1. Se $3n$ é da forma $7a+11b$, com $b \geq 2$, então $3(n+1) = 3n+3 = 7a+11b+3 = 7a+11b+14-11 = 7(a+2)+11(b-1)$ também é da forma pretendida.

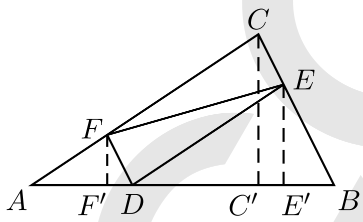
   Deste modo, como $69 = 7 \times 2 + 11 \times 5$ é da forma pretendida, então também 72, 75, 78 e 81 o são.

   Se $3n$ é da forma $7a+11b$, então $3n+18 = 7a+11b+18 = 7(a+1)+11(a+1)$ também é dessa forma. Portanto, todos os múltiplos de 3 maiores que 66 são da forma pretendida .

   Por outro lado, se tivéssemos $66 = 7a+11b$, então $11(6-b) = 7a$ seria um múltiplo comum de 7 e 11, ou seja, seria pelo menos 77.

   Logo o maior múltiplo de 3 que não é da forma $7a+11b$ é 66.

2. Sejam F', C' e E' as projeções ortogonais de F, C e E na reta AB.



   Temos então que

$$\text{Área}_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{C'C}}{2}, \qquad \text{Área}_{[AFD]} = \frac{\overline{AD} \times \overline{F'F}}{2} \quad \text{e} \quad \text{Área}_{[DEB]} = \frac{\overline{DB} \times \overline{E'E}}{2}.$$

   Como $AB \parallel AD \parallel DB$, $BC \parallel DF \parallel BE$ e $CA \parallel FA \parallel ED$, então $[ABC]$, $[ADF]$ e $[DBE]$ são semelhantes.

   Como $\text{Área}_{[DEB]} = 4 \times \text{Área}_{[AFD]}$, então $\frac{\overline{DB} \times \overline{E'E}}{2} = 4 \times \frac{\overline{AD} \times \overline{F'F}}{2}$, ou seja,

$$\frac{\overline{DB} \times \overline{E'E}}{\overline{AD} \times \overline{F'F}} = 4$$

   Pela semelhança $[ADF] \sim [DBE]$, temos $\left(\frac{\overline{DB}}{\overline{AD}}\right)^2 = 4$, ou seja, $\overline{DB} = 2 \times \overline{AD}$.

   Assim, $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = 3 \times \overline{AD}$.

   Como $[ABC] \sim [ADF]$, com razão de semelhança 3, então $\text{Área}_{[ADF]} = \frac{1}{9}\text{Área}_{[ABC]} = 1$, pelo que $\text{Área}_{[DEB]} = 4\text{Área}_{[AFD]} = 4$.

   Finalmente tem-se $\text{Área}_{[ABC]} = \text{Área}_{[ADF]} + \text{Área}_{[DEB]} + \text{Área}_{[CFE]} + \text{Área}_{[DFE]} \Leftrightarrow 9 = 1+4+2 \times \text{Área}_{[CFE]} \Leftrightarrow \text{Área}_{[CFE]} = 2$.

3. Numeremos os lugares da mesa de 1 a 22. Dos lugares 1 e 5 só um pode estar ocupado, já que há três cadeiras entre eles. O mesmo entre 5 e 9, 9 e 13, 13 e 17, 17 e 21, 21 e 3, 3 e 7, 7 e 11, 11 e 15, 15 e 19 e 19 e 1. Obtemos assim um ciclo de 11 lugares $(1, 5, 9, 13, 17, 21, 3, 7, 11, 15, 19, 1)$ em que não se podem ocupar dois lugares consecutivos, pelo que podemos apenas ocupar 5 deles. Se começarmos o mesmo processo no lugar 2 obtemos um segundo ciclo de 11 lugares $(2, 6, 10, 14, 18, 22, 3, 8, 12, 16, 20, 2)$ com a mesma propriedade, pelo que apenas 5 destes podem estar ocupados. Então podem sentar-se no máximo 10, por exemplo nos lugares $1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 17$ e 18.

4. Vejamos primeiro quais são os números que são centro de si próprios.

   Seja $n = 10a + b$, com $0 \leq b \leq 9$. O centro de n é $a + 4b$. Tem-se $10a + b = a + 4b \Leftrightarrow b = 3a$. Logo os únicos números que são centro de si próprios são 13, 26 e 39.

   Temos n múltiplo de 13 se e só se $n + 39b$ é múltiplo de 13, ou seja, $10a + 40b$ é múltiplo de 13. Como 10 é primo com 13, então n é múltiplo de 13 se e só se $a + 4b$ é múltiplo de 13. Assim, se uma sucessão começa com um número n que não é múltiplo de 13, nenhum dos termos seguintes é múltiplo de 13 e portanto não é centro de si próprio. Logo n não é centrado.

   Se n é múltiplo de 13, então $(a + 4b) - (10a + b) = 3(b - 3a) \leq 0$, logo a sucessão que começa em n é decrescente até chegar a um termo que é centro de si próprio, ou seja n é centrado.

   Portanto, os números centrados são os múltiplos de 13.