XXXV OPM - Final - 1º Dia - 06.04.2017 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

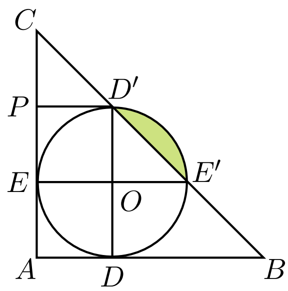
1. (a) Para usar todas as 7 lanternas, o Vasco tem de formar no mínimo 3 equipas de 3 elementos, logo 9 participantes ao todo. Assim, o Vasco tem de arranjar, no mínimo, 4 bússolas, 3 mapas e 2 lanternas. Opção correta: C).

   (b) Como $[ABC]$ é isósceles e $B\widehat{A}C = 12°$, vem $D\widehat{B}C = 2\times 12 = 24°$. Além disso, $B\widehat{C}A + B\widehat{C}D + D\widehat{C}E = 180°$, logo $D\widehat{C}E = 180° - B\widehat{C}D - B\widehat{C}A$. Como $[BCD]$ é isósceles vem $D\widehat{C}E = 2\times D\widehat{B}C - B\widehat{C}A = 2\times 24 - 12 = 36°$. Analogamente, $E\widehat{D}F = 2\times D\widehat{C}E - B\widehat{D}C = 2\times 36 - 24 = 48°$. Finalmente, como $[DEF]$ é isósceles, $D\widehat{E}F = 180 - 2\times 48 = 180 - 96 = 84°$. Opção correta: B).

   (c) Entre os seis candidatos, quaisquer três idades somadas dão 22 ou 24. Isso significa que tem de haver repetições nas idades dos diferentes candidatos. De facto, vejamos que não pode haver três idades diferentes entre os candidatos. Suponhamos que as idades dos 6 candidatos são a, b, c, x, y e z com $x \neq y \neq z$ então, por exemplo, as somas $a + b + x$, $a + b + y$ e $a + b + z$ são três somas diferentes, o que não pode acontecer por hipótese. Logo há no máximo duas idades diferentes entre os candidatos. Além disso, como tem de haver duas somas diferentes (22 e 24), não podem ter todos a mesma idade. Portanto há, entre os candidatos, exatamente duas idades distintas: x e y. Suponhamos que há três candidatos com x anos (e portanto três candidatos com y anos também). Então conseguimos formar quatro somas distintas: $x + x + x, x + x + y, x + y + y$ e $y + y + y$. Isso contradiz a hipótese. Suponhamos agora que há quatro candidatos com x anos (e dois candidatos com y anos). Então conseguimos formar três somas distintas: $x + x + x, x + x + y$ e $x + y + y$. Isso também contradiz a hipótese. Portanto tem de haver cinco candidatos com x anos e um com y anos e as duas somas diferentes são: $x + x + x$ e $x + x + y$. Como $x + x + x = 3x$ é um múltiplo de 3, essa soma tem de ser igual a 24 (porque 22 não é múltiplo de 3). Logo $x = 8$ e $2x + y = 22$ implica que $y = 6$. Portanto o candidato mais novo tem 6 anos. Opção correta: B).

   (d) O algarismo escrito numa posição ímpar qualquer $2n + 1$, com $n \geq 1$, tem de ser igual ao algarismo que já foi escrito na posição n da lista. Assim, depois de escolher os algarismos nas 1008 posições pares da lista, o único algarismo que falta escolher é o algarismo da posição $n = 1$. Temos portanto 1009 posições para preencher com o algarismo 0 ou 1 e há 2^{1009} formas de fazer isso. Opção correta: E).

2. Denotemos por O o centro do círculo e por A, B e C os vértices do triângulo, em que o ângulo reto fica no vértice A. Sejam D e E os pontos em que o círculo é tangente a AB e AC respetivamente, e sejam D' e E' os pontos diametralmente opostos a D e E. Finalmente, seja P a projeção ortogonal de D' sobre AC, como na figura.



O triângulo $[PD'C]$ é semelhante a $[ABC]$, portanto é isósceles. Daqui se vê que o raio do círculo é dado por $\overline{AE} = \overline{EP} = \overline{PC} = \overline{AC}/3 = 2$. A área da parte do círculo que fica fora do triângulo é igual à diferença entre um quarto da área do círculo (que é $\pi \times 2^2/4 = \pi$) e a área do triângulo $[OE'D']$ (que é $2 \times 2/2 = 2$), ou seja, $\pi - 2$.

3. As equipas da região norte não podem jogar entre si, por isso cada uma delas tem apenas cinco adversários possíveis. Ordenando as cidades do norte (Braga, Porto e Vila Real), e sorteando os seus adversários por esta ordem, há 5 possibilidades para escolher a equipa que joga com Braga, 4 para escolher a equipa que joga com o Porto e 3 para escolher a equipa que joga com Vila Real. Existem assim $5 \times 4 \times 3 = 60$ maneiras de sortear os pares de modo a que as equipas do norte não sejam sorteadas juntas. Temos ainda que excluir as situações em que as duas equipas do centro ficam juntas. Nesse caso as três equipas do norte jogariam contra as restantes três equipas, havendo assim $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras de sortear os pares. A resposta pretendida é portanto igual a $60 - 6 = 54$.