Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

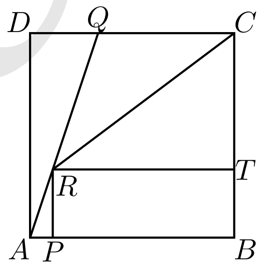
1. (a) O número de casas pintadas de azul é $2017 + 2017 - 1 = 4033$ pois cada diagonal tem 2017 casas e, uma vez que 2017 é ímpar, as diagonais têm uma casa em comum. O número de casas pintadas de branco é $2017^2 - (2 \cdot 2017 - 1) = 2017^2 - 2 \cdot 2017 + 1 = (2017 - 1)^2 = 2016^2$. Opção correta: A).

(b) A primeira observação a fazer é que os dois últimos algarismos do quadrado de um número inteiro só dependem dos dois últimos algarismos desse inteiro. De facto, dado um inteiro na forma $100x + y$, com $x, y \in \mathbb{N}$ e $0 \leq y < 99$, $(100x + y)^2 = 10000x^2 + 200xy + y^2 = (100x^2 + 2xy)100 + y^2$. Podemos assim resolver o problema considerando apenas números de dois algarismos.

Dado $y = 10a + b$ com $0 \leq a, b < 9$, também o algarismo das unidades de y^2 depende apenas do algarismo das unidades de b^2 pois $(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = (10a^2 + 2ab)10 + b^2$. Como o algarismo das unidades de y^2 é 4, as únicas possibilidades são $b = 2$ ou $b = 8$ e, consequentemente, o algarismo das unidades de $y - 1$ é 1 ou 7, respetivamente. No entanto, não pode ser 1 pois sabemos que o algarismo das unidades de $(y - 1)^2$ é 9. Assim, tem-se obrigatoriamente $b = 8$.

Agora, tendo em conta que o algarismo das dezenas de $y^2 = (10a^2 + 16a)10 + 64 = (10a^2 + 16a + 6)10 + 4$ é 8, temos que o algarismo das unidades de $10a^2 + 16a + 6$ é 8, ou equivalentemente, o algarismo das unidades de $16a$ é 2. As únicas possibilidades para o algarismo a são, então, 2 e 7. Como $29^2 = 841$ e $79^2 = 6241$, em qualquer dos casos $(y + 1)^2$ termina em 41. Opção correta: E).

(c) Como os triângulos $[QAD]$ e $[ARP]$ são semelhantes, então $\dfrac{\overline{DQ}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{RP}}$. Logo $\dfrac{3}{1} = \dfrac{9}{\overline{RP}}$, ou seja, $\overline{RP} = 3$. Consideremos agora a projeção ortogonal T de R sobre CB. Tem-se $\overline{CT} = \overline{CB} - \overline{TB} = \overline{CB} - \overline{RP} = 9 - 3 = 6$ e $\overline{RT} = \overline{AB} - \overline{AP} = 9 - 1 = 8$, logo, pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{CR}^2 = \overline{CT}^2 + \overline{RT}^2 = 36 + 64 = 100$. Logo, $\overline{CR} = 10$. Opção correta: C).



(d) Aplicando a condição a um número par $n = 2k$ temos que $x_{2k} = x_{4k+1}$. Como também se tem $x_k = x_{2k+1} = x_{4k+1}$, então para qualquer número natural k, tem-se $x_k = x_{2k} = x_{2k+1}$. Isto mostra que, para qualquer $i \geq 2$, o número que aparece na posição i tem necessariamente de aparecer algures na sequência antes da posição i. Mais especificamente, se i é ímpar tem-se $x_i = x_{i-1}$ e se i é par tem-se $x_i = x_{\frac{i}{2}}$. Repetindo este raciocínio o número necessário de vezes, chegamos à conclusão que $x_i = x_1$ para qualquer i. Assim, só há duas sequências que satisfazem esta propriedade: a sequência só com 0's e a sequência só com 1's. Opção correta: C).

2. Sendo $\angle EAB$ ângulo externo a $[ABC]$, tem-se $E\widehat{A}B = A\widehat{B}C + A\widehat{C}B = 4\,A\widehat{B}C$. Além disso, como $\dot{A}D$ é bissetriz do ângulo externo tem-se $D\widehat{A}C = 2\,A\widehat{B}C$.

   Como $\angle ACB$ é ângulo externo a $[ADC]$, tem-se $A\widehat{D}C = A\widehat{C}B - C\widehat{A}D = 3\,A\widehat{B}C - 2\,A\widehat{B}C = A\widehat{B}C$.

   Assim, $[ADB]$ é isósceles e, por isso, $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{EB}$, logo $[EAB]$ também é isósceles e $A\widehat{E}B = E\widehat{A}B = 4\,A\widehat{B}C$.

   Então, por um lado $E\widehat{B}A = 180° - A\widehat{E}B - E\widehat{A}B = 180° - 8\,A\widehat{B}C$ e, por outro, tendo em conta que $\dot{B}E$ é bissetriz do ângulo externo em B tem-se que $A\widehat{B}E = (180° - A\widehat{B}C)/2 = 90° - \frac{A\widehat{B}C}{2}$.

   Portanto, $180° - 8\,A\widehat{B}C = 90° - \frac{A\widehat{B}C}{2}$, donde se conclui que $A\widehat{B}C = 12°$.

3. O valor de n é 12. Havendo 12 atletas, podemos por exemplo dividir os atletas nas equipas $A = (12, 11, 1)$, $B = (10, 7, 3)$, $C = (9, 5, 4)$, $D = (8, 6, 2)$.

   Para satisfazer as condições do enunciado, cada equipa tem de ter pelo menos três atletas, e há pelo menos duas equipas. Vemos também que a soma dos números de todos os atletas numa equipa tem de ser par (pois é igual ao dobro do número do seu capitão). Portanto a soma dos números de todos os atletas na competição, que é igual a $n(n+1)/2$, é um número par. Isto acontece quando ou n ou $n+1$ é um múltiplo de quatro. Os possíveis valores de n, menores do que 12, satisfazendo estas restrições seriam só 7 ou 8. Em qualquer destes casos haveria duas equipas, e portanto dois capitães. Mas em ambos os casos, a soma dos números de dois dos atletas não é suficiente para igualar a soma de todos os outros (o que teria de acontecer se os designassemos capitães), uma vez que $6+7 < 1+2+3+4+5$ e $7+8 < 1+2+3+4+5+6$. Portanto a divisão em equipas descrita pelo Emídio não seria possível com menos de doze atletas.