OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXV OPM - 2ª Eliminatória - 11.01.2017 - Categoria B - 10º/12º anos

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Seja N o número do apartamento do João. Então N pode ser escrito como

$$N = 25(x-1) + y$$

onde $x \in \{1, \ldots, 100\}$ é o número do andar e $y \in \{1, \ldots, 25\}$.

Do enunciado temos que x é o número do apartamento da Maria e $N + x = 2017$. Logo

$$25(x-1) + y + x = 2017 \Leftrightarrow 26x + y = 2042.$$

Como $2042 = 78 \times 26 + 14$, então $x = 78$. Logo $N = 2017 - 78 = 1939$.

2. Para que um número n seja trímpar, o conjunto de cada três dos seus algarismos consecutivos contém precisamente ou um algarismo ímpar e dois algarismos pares, ou três algarismos ímpares. Se n tiver três algarismos ímpares consecutivos, então também tem três algarismos consecutivos onde um é par e os outros dois são ímpares, ou seja, n não é trímpar.

Denotemos por a_i os algarismos de n, ou seja, escrevemos n como $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$.

Entre os algarismos a_2, a_3 e a_4 há exatamente um ímpar e entre a_5, a_6 e a_7 também há exatamente um ímpar. Como há três números ímpares, então a_1 é ímpar. Isto determina que os outros algarismos ímpares são a_4 e a_7, Logo n é da forma $IPPIPPI$, onde P é um algarismo par e I é um algarismo ímpar.

Há $4! = 24$ formas de colocar os algarismos pares e há $3! = 6$ formas de colocar os algarismos ímpares. Logo ao todo há $24 \times 6 = 144$ números trímpares com os algarismos de 0 a 6.

3. Sejam $x = \overline{FG}$, $y = \overline{FB}$ e $z = \overline{AB} = \overline{CD}$. Como $[ABCD]$ é um paralelogramo, então $[FBG]$ e $[FAD]$ são semelhantes e $[AFE]$ e $[CDE]$ também são semelhantes. Logo,

$$\frac{x}{y} = \frac{16+12}{z-y} \quad \text{e} \quad \frac{z-y}{12} = \frac{z}{16}$$

Da segunda igualdade concluimos que $z = 4y$. Assim, a primeira igualdade fica $\frac{x}{y} = \frac{28}{3y}$, pelo que $x = \frac{28}{3}$.

4. Se o tabuleiro tiver inicialmente pintadas as 1011 casas indicadas na seguinte figura, o tabuleiro ficará totalmente pintado no final.

Suponha-se agora que o tabuleiro tem inicialmente pintadas 1010 (ou menos) casas. É necessário mostrar que no final do processo o tabuleiro não vai ficar totalmente pintado.

Considere-se o perímetro da região pintada, isto é, o número de arestas que apenas tocam numa casa pintada. Quando se pinta uma casa que tem 2 casas adjacentes pintadas, este perímetro mantém-se. Quando se pinta uma casa que tem 3 ou 4 casas adjacentes pintadas, o perímetro diminui. Como inicialmente o perímetro é no máximo $1010 \times 4 = 4040$ e o perímetro do tabuleiro é $2 \times 4 + 2 \times 2017 = 4042 > 4040$, não é possível pintar todo o tabuleiro.