OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXIX OPM - Final - 11.09.2021 - Categoria B - 10°/12° anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3 e 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Sejam S a soma dos restos das divisões de 365 pelos inteiros de 1 a 365 e S' a soma dos restos das divisões de 366 pelos inteiros de 1 a 366. Como a divisão de 366 por 366 tem resto 0, podemos considerar que, em ambas as somas, temos restos de divisão por inteiros de 1 a 365.

   Seja n um inteiro de 1 a 365 e consideremos as divisões de 365 e 366 por n:

$$qn + r = 365 \qquad q'n + r' = 366.$$

   Logo, $(q - q')n + (r - r') = -1$.

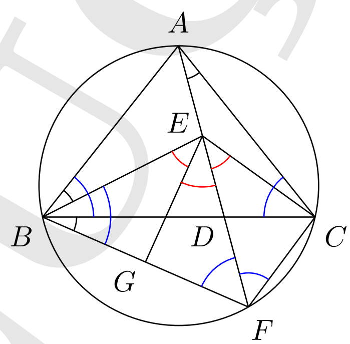
   Se $q' = q$, então $r - r' = -1$; se $q' = q + 1$, então $r - r' = n - 1$.

   Portanto, cada n contribui com -1 para a diferença $S - S'$ e os divisores n de 366 contribuem adicionalmente n para essa diferença.

   Os divisores n de 366 entre 1 e 365 são: $1, 2, 3, 6, 61, 122$ e 183, cuja soma é 378.

   Portanto, $S - S' = 378 - 365 = 13$. Logo $S > S'$, ou seja, a soma dos restos das divisões de 365 pelos inteiros de 1 a 365 é maior do que a soma dos restos das divisões de 366 pelos inteiros de 1 a 366.

2. Sejam $F \neq A$ a intersecção de AD com a circunferência circunscrita a $[ABC]$ e G o ponto médio de $[BF]$.



   Como $\angle CBF$ e $\angle CAF$ estão inscritos no mesmo arco, então

$$C\widehat{B}F = C\widehat{A}F = C\widehat{A}B - E\widehat{A}B = D\widehat{E}B - E\widehat{A}B = E\widehat{B}A.$$

   Logo $E\widehat{B}F = E\widehat{B}D + D\widehat{B}F = E\widehat{B}D + E\widehat{B}A = D\widehat{B}A = B\widehat{C}A = B\widehat{F}E = A\widehat{F}C$, pelo que $\overline{EB} = \overline{EF}$.

   Assim, a bissetriz de $\angle BEF$ é a mediatriz de $[BF]$.

   Portanto, os triângulos $[EBG]$, $[EFG]$ e $[EFC]$ são congruentes, pelo que $\overline{BF} = 2 \times \overline{FC}$. Pelo teorema da bissetriz aplicado ao ângulo em F de $[BFC]$, tem-se $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = 2$.

3. Seja S a soma pretendida e consideremos o conjunto T das sequências $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$, onde cada a_i pertence ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ e $a_0 \leq a_i$, para cada $i = 1, \ldots, k$.

   A sequência $(a_1, \ldots, a_k)$ contribui com uma parcela $\min(a_1, \ldots, a_k)$ para S e dá origem a $\min(a_1, \ldots, a_k)$ sequências de T: $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$, com $a_0 = 1, 2, \ldots, \min(a_1, \ldots, a_k)$.

   Portanto S coincide com o número de elementos de T.

   Para cada valor de a_0, os elementos $a_1, \ldots, a_k$ podem variar entre a_0 e 2021, ou seja, há $(2022 - a_0)^k$ sequências de T com esse valor de a_0.

   Assim, o número total de elementos de T é $S = 2021^k + 2020^k + \cdots + 3^k + 2^k + 1$.

4. Vamos assumir que ambos os jogadores são perfeitos, e como tal vão sempre tentar maximizar a sua soma. Com isto em mente, a qualquer momento, qualquer jogada que não seja retirar uma das duas maiores cartas disponíveis é não optimal, logo não acontece.

   Logo, o conjunto de cartas restantes na i-ésima jogada é totalmente caracterizado por k_i e m_i, $k_i > m_i$, onde k_i é o valor da maior carta disponível, m_i é o valor da segunda maior carta disponível na i-ésima jogada e para todo o inteiro positivo menor que m_i, a carta com esse valor ainda está disponível. Se só houver uma carta no baralho, dizemos que $m_i = 0$. Também vamos considerar que o par de jogadas consecutivas de um mesmo jogador, que se sucedem após o outro jogador ter tirado a maior carta, como se fosse uma só jogada. Temos então que $k_0 = n$, $m_0 = n - 1$, e que o Pedro só joga quando i é par e o Tiago quando i é ímpar.

   Comecemos por notar que, para $n = 3$, o Tiago consegue sempre empatar. Vamos provar que $n = 3$ é o maior número para o qual o Tiago consegue empatar. Para isso vamos definir uma estratégia para o Pedro e ver que é vencedora para os restantes casos. Seja D_i a diferença entre a soma das cartas do Pedro e a soma das cartas do Tiago após a i-ésima jogada. No início do jogo, $D_0 = 0$.

   A estratégia que definimos para o Pedro é a seguinte: Se $k_i < 2m_i - 1$, o Pedro escolhe a carta m_i, caso contrário, o Pedro escolhe a carta k_i. Quando o Pedro tem duas jogadas seguidas, devido ao Tiago ter tirado a maior carta no turno anterior, então ele começa por retirar m_i e depois, se $k_i < 2m_i - 3$, o Pedro escolhe a carta $m_i - 1$, caso contrário, o Pedro escolhe a carta k_i (a condição é a mesma, mas atualiza o m_i entre as suas jogadas).

   Se, num par de jogadas Pedro-Tiago, nenhum dos dois jogadores retirou a carta maior, então $D_{i+2} = D_i + 1$, isto é, a diferença entre as somas aumenta.

   Notemos que, se nenhum jogador tirou a maior carta, quando um jogador volta a jogar, a maior carta manteve--se igual, mas a segunda maior carta diminuiu 2 unidades.

   Se, na sua estratégia, o Pedro tira a maior carta, então $k_i = 2m_i - 1$ ou $k_i = 2m_i - 2$. Logo $k_{i+1} = m_i$ e $m_{i+1} = m_i - 1$. Se na sua vez, o Tiago não retira a maior carta disponível, então ele tira no máximo $2m_i - 3$, que é menor que k_i, logo $D_{i+2} \geq D_i + 1$. Se o Tiago retira somente a maior carta disponível, então a diferença aumenta e ele perde a vantagem da jogada extra. Se o Tiago retirou as duas maiores cartas disponíveis, o que é possível se ele começar pela segunda maior, então ele somou $2m_i - 1$, podendo ter recuperado um valor na diferença das somas, mas à custa do Pedro ter uma jogada extra. Aqui, se o Pedro retira m_{i+2} (assumindo $m_{i+2} > 0$) já recuperou qualquer diferença perdida e a partir daqui o jogo continua normalmente, começando Pedro. Para as nossas contas, vamos considerar uma parcela $-m_{i+2}$ na última jogada do Tiago, e assim temos que a diferença continuou a aumentar. Se $m_{i+2} = 0$, o Pedro tira a última carta disponível, o que anula a perda do último par de jogadas. Isto só não pode acontecer se o Tiago tirou as últimas duas cartas, mas neste caso o Tiago teve de ter tirado as cartas 1 e 2, o que implica a que na jogada anterior o Pedro tenha tirado pelo menos 3, logo não houve diminuição da diferença.

Resta então ver o caso em que é o Tiago a tirar a maior carta, sem o Pedro o ter feito na jogada anterior.

Contando a jogada do Pedro anterior à do Tiago, e a primeira das duas seguidas a que ele tem direito, temos então que o Pedro retira m_i e $m_{i+2} = m_i - 2$ e o Tiago retira k_i, que é menor ou igual a $2m_i - 2$ (caso contrário o Pedro teria escolhido k_i quando escolheu m_i). Logo, antes da segunda jogada do Pedro, se contarmos a primeira jogada como uma parcela $-m_{i+2}$ na jogada do Tiago, temos que $D_i \leq D_{i+2}$, e o Pedro começa a jogar com $k_{i+2} = m_i - 1$ e $m_{i+2} = m_i - 3$ (o m_{i+2} já está atualizado tendo em conta a primeira jogada do Pedro.).

Logo, em todos os pares de jogadas Pedro-Tiago, a diferença das somas nunca diminui (em alguns casos, a próxima jogada do Pedro é uma jogada dupla, e é precisar considerar a primeira dessas jogadas neste par), sendo que só em casos especiais é que não aumenta (k tem de estar perto de $2m_i$ ou m_i perto de 1). Em particular, para $n > 3$, após o primeiro par de jogadas temos uma diferença das somas já positiva. Logo, para $n > 3$, o Pedro consegue ganhar sempre.