XXXIX OPM - Final - 11.09.2021 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3 e 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Os algarismos das unidades dos primeiros números da lista são $1, 2, 5, 2, 9, 0, 9, 8, 5, 8, 1, 0, 1, 2$. Como a sequência apenas depende dos dois últimos números, a sequência repete-se em ciclos de comprimento 12. Uma vez que $2021 = 12 \times 168 + 5$, então o último algarismo do 2021^{o} número da lista é 9.

   Opção correta: E).

   (b) O número de medalhados é um sexto do número de não medalhados, logo é um sétimo do total. Portanto, houve $21/7 = 3$ amigos medalhados e $3 \times 6 = 18$ amigos não medalhados.

   Os amigos não medalhados receberam entre 18 e $18 \times 2 = 36$ rebuçados, logo os amigos medalhados receberam entre $54 - 36 = 18$ e $54 - 18 = 36$ rebuçados.

   Como não houve medalhas de prata, houve 1 medalha de ouro e 2 de bronze. Assim, os amigos medalhados receberam $20 + 2 \times 5 = 30$ rebuçados e os não medalhados receberam $54 - 30 = 24$ rebuçados, dos quais $24 - 18 = 6$ menções honrosas.

   Opção correta: A).

   (c) Num teste na turma do Filipe, a m´edia dos alunos que tiveram positiva ´e 65, a m´edia dos alunos que tiveram negativa ´e 35 e a m´edia de todos os alunos ´e 53. Qual ´e a proporc¸ ?ao de alunos que teve positiva?

   Sejam P o número de alunos que tiveram positiva e N o número de alunos que tiveram negativa.

   Então $\dfrac{65 \times P + 35 \times N}{P + N} = 53$, ou seja, $65P + 35N = 53P + 53N$. Logo $12P = 18N$, donde $N = \dfrac{2}{3}P$.

   Assim $\dfrac{P}{P+N} = \dfrac{P}{P + \frac{2}{3}P} = \dfrac{3}{5}$.

   Opção correta: C).

   (d) Como não pode haver duas quadrículas com moeda com um lado em comum, então em cada coluna, exceto uma, há exatamente uma moeda.

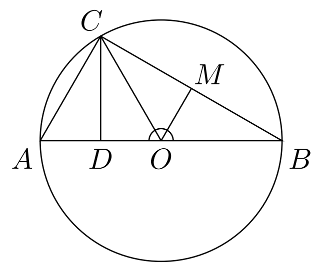
   Se a coluna sem moeda for a primeira ou a última, as moedas em colunas consecutivas estão alternadamente em cima e em baixo. Há 2 escolhas para a coluna sem moeda e 2 escolhas para a posição da moeda mais à esquerda, logo, neste caso, temos $2 \times 2 = 4$ possibilidades.

   Se a coluna sem moeda estiver no interior do tabuleiro, à esquerda e à direita desta coluna as moedas estão alternadamente em cima e em baixo. Há 98 escolhas para a coluna sem moeda e 2×2 escolhas para a posição da moeda mais à esquerda e mais à direita, logo, neste caso, temos $98 \times 2 \times 2 = 392$ possibilidades.

   Ao todo há $392 + 4 = 396$ possibilidades.

   Opção correta: C).

2. Como $\overline{OC} = \overline{OB}$ e M é o ponto médio de $[BC]$, então os triângulos $[OMB]$ e $[OMC]$ são congruentes. Os triângulos $[ODC]$ e $[OMC]$ têm um ângulo reto, um cateto igual e a hipotenusa igual, logo são congruentes. Logo $B\hat{O}M = C\hat{O}M = C\hat{O}D = 60°$.



Os triângulos $[BAC]$ e $[BOM]$ são semelhantes, logo

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BM}} = 2$$

ou seja, $\overline{AC} = 2 \times \overline{OM} = 14$.

Como $\overline{OA} = \overline{OC}$ e $C\hat{O}A = 60°$, então $[OAC]$ é equilátero, logo o raio da circunferência é igual a $\overline{AC} = 14$.

3. Para o Luís comprar tantos botões azuis como brancos, tem que comprar pelo menos $\operatorname{mmc}(a, b)$ botões. Logo $\operatorname{mmc}(a, b) = 2000 = 2^4 \times 5^3$.

   Da mesma forma, concluimos que $\operatorname{mmc}(b, c) = 5000 = 2^3 \times 5^4$ e $\operatorname{mmc}(a, c) = 10000 = 2^4 \times 5^4$.

   Então b é um divisor de 2000 e de 5000, logo é um divisor de $\operatorname{mdc}(2000, 5000) = 1000$.

   Se $b = 2^3 \times 5^3 = 1000$, então obtemos as possibilidades $a = 16, 80, 400, 2000$ e $c = 625, 1250, 2500, 5000$.

   Se $b = 2^x \times 5^3$, com $x < 3$, ou seja, se $b = 125, 250, 500$, então $a = 16, 80, 400, 2000$ e $c = 5000$.

   Se $b = 2^3 \times 5^y$, com $y < 3$, ou seja, se $b = 8, 40, 200$, então $a = 2000$ e $c = 625, 1250, 2500, 5000$.

   Se $b = 2^x \times 5^y$, com $x, y < 3$, ou seja, se $b = 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$, então $a = 2000$ e $c = 5000$.

4. Seja S a soma pretendida e consideremos o conjunto T das sequências (a, b, c, d), onde cada a, b, c, d pertence ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ e $d \leq a, b, c$.

   A sequência (a, b, c) contribui com uma parcela $\min(a, b, c)$ para S e dá origem a $\min(a, b, c)$ sequências de T: (a, b, c, d), com $d = 1, 2, \ldots, \min(a, b, c)$.

   Portanto S coincide com o número de elementos de T.

   Para cada valor de d, os elementos a, b, c podem variar entre d e 2021, ou seja, há $(2022 - d)^3$ sequências de T com esse valor de d.

   Assim, o número total de elementos de T é $S = 2021^3 + 2020^3 + \cdots + 3^3 + 2^3 + 1$.