XXXIX OPM - 2ª Eliminatória - 28.04.2021 - Categoria B - 10º/12º anos

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Como a Ana tem de se inscrever em pelo menos um desporto onde o João não esteja inscrito, o João pode escolher 1, 2 ou 3 desportos diferentes. Se optar por 1 desporto apenas, pode fazê-lo de 4 formas. Neste caso, a Ana tem de praticar o desporto escolhido pelo João e escolher pelo menos mais um desporto. Como ainda há 3 desportos disponíveis, a Ana tem 3 possibilidades se optar por apenas mais um desporto; 3 possibilidades se optar por 2 desportos; e 1 possibilidade apenas se optar pelos 3 desportos. Há portanto $4 \times (3+3+1) = 28$ possibilidades. Se o João optar por praticar 2 desportos, pode escolhê-los de 6 formas diferentes. A Ana pode então escolher praticar mais 1 ou 2 desportos. Tem 2 possibilidades de escolher mais 1 desporto e tem 1 possibilidade de escolher praticar todos os desportos. Neste caso, há $6 \times (2+1) = 18$ possibilidades. Finalmente, se o João optar por praticar 3 desportos, pode escolhê-los de 4 formas diferentes, enquanto que a Ana tem forçosamente de escolher todos os desportos. Há 4 possibilidades neste caso.

   Assim, há um total de $28 + 18 + 4 = 50$ possíveis escolhas.

2. Se n não tem fatores primos, então $n = 1$, que é solução do problema.

   Se n só tem um fator primo, então n é da forma p^r. Os seus divisores são $1, p, \ldots, p^r$ e o seu produto é $p^{1+\cdots+r} = p^{r(r+1)/2}$. Então $p^{r(r+1)/2} = p^{2r}$, pelo que $r = 3$.

   Se n tem mais do que um fator primo, então n é da forma $p^r a$, com p e a primos entre si. Se $r \geq 2$, então o produto dos divisores de n é maior do que $p^r \times a \times n = n^2$, pelo que n não é solução. Portanto, se n é uma solução com mais do que um fator primo, então n é da forma $p_1 \ldots p_k$, com p_i primos distintos.

   Se $n = p_1 p_2$, então o produto dos fatores de n é $1 \times p_1 \times p_2 \times n = n^2$, logo n é solução.

   Se n tem mais de dois fatores primos distintos, então n é o produto de três números a, b, c, maiores que 1 e primos entre si. Assim, ab, ac, bc e abc são três fatores de n e $(ab)(ac)(bc)(abc) > n^2$, logo n não é solução.

   Portanto os números procurados são o 1 e os números da forma p^3 ou pq, com p, q primos distintos.

   Observando a lista dos números primos menores do que 100 ($2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$), concluímos que no caso $n = p^3$ há três soluções ($p \in \{2, 3, 5\}$) e no caso $n = pq$ há 56 soluções ($(p = 2, 3 \leq q \leq 97), (p = 3, 5 \leq q \leq 61), (p = 5, 7 \leq q \leq 37), (p = 7, 11 \leq q \leq 23), (p = 11, 13 \leq q \leq 17)$). Portanto ao todo há 60 soluções.

3. Uma vez que $A\hat{D}E = 60°$ e o triângulo $[AED]$ é retângulo, podemos concluir que $E\hat{A}D = 30°$, $\overline{EA} = \sqrt{3}$ e $\overline{ED} = 1$. O comprimento do segmento $[DC]$ também mede 1, por isso o triângulo $[EDC]$ é isósceles e tem-se que $D\hat{C}E = D\hat{E}C = 30°$. Por outro lado, sendo $[EDC]$ isósceles e $\overline{DC} = 1$, pode concluir-se que $\overline{EC} = 2 \times \cos 30° = \sqrt{3}$, ou seja, $\overline{EA} = \overline{EC}$. Agora observe-se que $B\hat{D}C = 120°$ e $D\hat{C}B = 45°$, portanto $D\hat{B}C = 15°$ e o triângulo $[EBC]$ é isósceles, com $\overline{EB} = \overline{EC}$. Portanto $\overline{EB} = \overline{EC} = \overline{EA}$, o que significa que E é o circuncentro de $[ABC]$.

4. Designemos o aluno que recebeu um presente no n-ésimo sorteio por aluno n. Assim, no n-ésimo sorteio participam os alunos $n, \ldots, 30$. No 30^{o} sorteio, o aluno 30 recebeu o número 1. No 29^{o} sorteio, como não recebeu o mesmo número, recebeu o número 2. Da mesma forma, no 28^{o} sorteio recebeu o número 3 e assim por diante, tendo recebido no n-ésimo sorteio o número $31 - n$. No 29^{o} sorteio, o aluno 29 recebeu o número 1 e, de forma análoga ao caso anterior, conclui-se que recebeu no n-ésimo sorteio o número $30 - n$. Procedendo de forma semelhante para os restante alunos, conclui-se que o aluno k recebeu no n-ésimo sorteio o número $k + 1 - n$. Se o Francisco é o aluno k, então, como recebeu no primeiro sorteio o número 21, temos $k + 1 - 1 = 21$, ou seja, $k = 21$. Logo no oitavo sorteio, o Francisco recebeu o número $21 + 1 - 8 = 14$.