Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

*Sugestões para a resolução dos problemas*

1. Como a soma $1+2+\ldots+9=45$ é um múltiplo de $9$, para que o código seja um múltiplo de $9$, a soma dos dois algarismos que não estão no código tem de ser um múltiplo de $9$. Portanto, há quatro possibilidades para os algarismos que não pertencem ao código: $\{1,8\}$, $\{2,7\}$, $\{3,6\}$ e $\{4,5\}$.

    - Há duas formas de percorrer os algarismos $2$, $3$, $4$, $5$, $6$, $7$ e $9$, que descrevem os códigos $7452369$ e $9632547$;
    - Há duas formas de percorrer os algarismos $1$, $3$, $4$, $5$, $6$, $8$ e $9$, que descrevem os códigos $1458963$ e $3698541$;
    - Há seis formas de percorrer os algarismos $1, 2, 4, 5, 7, 8$ e $9$, que descrevem os códigos $9874125$, $5214789$, $9874521$, $1254789$, $9852147$ e $7412589$;
    - Há duas formas de percorrer os algarismos $1$, $2$, $3$, $6$, $7$, $8$ e $9$, que descrevem os códigos $1236987$ e $7896321$.

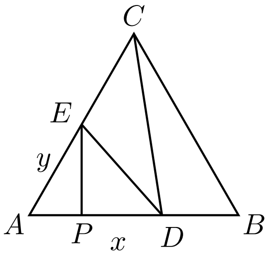
    Portanto, existem $2+2+6+2=12$ códigos nessas condições.

2. Vamos primeiro considerar que $2016$ é a soma de um número ímpar de números consecutivos, $2n+1$, e que $x$ é o elemento que está exatamente no meio da sequência. Neste caso a soma da sequência é igual a $(x-n)+(x-n+1)+\cdots+x+\cdots+(x+n)=(2n+1)\times x$, onde $x$ é maior do que $n$ porque todos os elementos da sequência são positivos. O número $2n+1$ é um número ímpar, portanto as possíveis escolhas para $2n+1$ são os divisores ímpares de $2016$: $1$, $3$, $7$, $9$, $21$ e $63$, a que correspondem as somas: $2016$, $671+672+673$, $285+286+\cdots+291$, $220+221+\cdots+228$, $86+87+\cdots+106$ e $1+2+3+\cdots+62+63$.

    Consideremos agora que $2016$ é a soma de um número par de números consecutivos, $2n$, e que $x$ e $x+1$ são os dois elementos que estão exatamente no meio da sequência. Neste caso a soma da sequência é igual a $(x-n+1)+\cdots+x+(x+1)\cdots+(x+n)=(2x+1)\times n=2016$, onde $x$ é maior ou igual do que $n$. O número $2x+1$ é um divisor ímpar de $2016$, e portanto o número $n$ é um divisor par de $2016$, de tal modo que $x\geq n$. Como o maior divisor ímpar de $2016$ é $63$, tem-se que $x\leq 31$ e que $n\geq 32$, uma vez que $(2x+1)\times n=2016$. Ou seja é impossível encontrar $x\geq n$ tais que $(2x+1)\times n=2016$, o que significa que não existe nenhuma sequência com um número par de números consecutivos, cuja soma seja $2016$.

    Concluímos assim que se pode escrever $2016$ de seis maneiras diferentes como soma de uma sequência de números naturais consecutivos.

3. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $D \in [AB]$ e $E \in [AC]$ e sejam $x = \overline{AD}$ e $y = \overline{AE}$.




Como os triângulos $[ABC]$ e $[ADC]$ têm a mesma altura, então área de $[ADC]$/área de $[ABC] = x$. Do mesmo modo, área de $[ADE]$/área de $[ADC] = y$. Logo, área de $[ADE]$/área de $[ABC] = xy$. Como $[ADE]$ tem metade da área de $[ABC]$, então $xy = 1/2$.

Seja $P$ a projeção ortogonal de $E$ sobre $AB$. Tem-se $\overline{AP} = y\cos(60) = \dfrac{y}{2}$ e $\overline{EP} = y\sin(60) = \dfrac{y\sqrt{3}}{2}$.

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{ED}^2 = \overline{EP}^2 + \overline{PD}^2 = \left(\dfrac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 = x^2 + y^2 - xy = x^2 + y^2 - \dfrac{1}{2}$.

O valor mínimo de $\overline{ED}$ ocorre quando $x^2 + y^2$ for mínimo. Ora $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2xy + 2xy = (x - y)^2 + 1$, que é mínimo quando $x = y$. Quando isto acontece, tem-se $x^2 = y^2 = \dfrac{1}{2}$, pelo que $\overline{ED}^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Assim, o valor mínimo de $\overline{ED}$ é $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.