OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXIV OPM - 2ª Eliminatória - 13.01.2016 - Categoria B - 10º/12º anos

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Seja n um número com as propriedades indicadas. Então

$$\begin{aligned} n &= 29a + b, \quad 0 \leq b \leq 28 \\ n &= 39c + d, \quad 0 \leq d \leq 38 \\ n &= 59e + f, \quad 0 \leq f \leq 58 \end{aligned}$$

Como $n = 59e + f = b + d + f$, então $b + d = 59e$. Mas $0 \leq b + d \leq 28 + 38 = 66$, logo $b + d = 0$ ou $b + d = 59$. Se $b + d = 0$, então n é múltiplo de 29 e 39 e portanto é múltiplo de 29×39, o que é impossível visto que $1 \leq n = b + d + f \leq 28 + 38 + 58 = 124$.

Portanto $b + d = 59$ e $e = 1$, pelo que $n \geq 59$. Logo $29a = 58, 87$ ou 116 e $39c = 39, 78$ ou 117.

Como $b \leq 28$ e $d \leq 38$, então $d \geq 59 - 28 = 31$ e $b \geq 59 - 39 = 21$. Tem-se $29a - 39c = d - b$, que é um número ímpar entre $31 - 28 = 3$ e $38 - 21 = 17$. A única forma de isto acontecer é $29a = 87$ e $39c = 78$.

Então $87 + b = 78 + (59 - b)$, ou seja, $b = 25$. Logo o único número natural com que o Marco pode ter começado é $n = 87 + 25 = 112$.

2. **Solução 1:** Para ir do canto inferior esquerdo ao canto superior direito é necessário passar uma e uma só vez por um dos seis pontos na diagonal oposta. Por simetria, o número de maneiras de chegar do canto inferior esquerdo a um deste pontos é o mesmo que o número de maneiras de chegar desse ponto ao canto superior direito, pelo que o total de caminhos que passam por cada um dos pontos é o quadrado do número de caminhos até esse mesmo ponto.

Ainda por simetria, o número de caminhos por um ponto é o mesmo que o número de caminhos pelo seu simétrico em relação ao centro do quadrado. Precisamos assim apenas de saber o número de formas de chegar aos pontos $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(4, 4)$ onde estamos a numerar os vértices de cima para baixo e da esquerda para a direita.

Para chegar a $(1, 1)$, o Quico tem de ir sempre para cima pelo que há apenas uma maneira de lá chegar. Para chegar a $(2, 2)$ ele tem de andar uma vez para a direita, e tem exatamente 7 formas de o fazer. Para $(4, 4)$ há mais possibilidades: se ele contornar por baixo o buraco inferior esquerdo tem 4 possibilidades, se o contornar pela esquerda tem 13 formas de o fazer, para um total de 17.

Pelas observações acima, o total de caminhos é $2(1^2 + 7^2 + 17^2) = 678$.

Solução 2: O número de caminhos para um vértice é a soma do número de caminhos para o vértice abaixo com o número de caminhos para o vértice à esquerda (sendo esse número considerado zero se o vértice não existir). Começando com 1 no canto inferior esquerdo e preenchendo todos os vértices com esta regra obtemos a seguinte tabela.

1	8	15	39	114	189	339	678
1	7	7	24	75	75	150	339
1	6		17	51		75	189
1	5	9	17	34	51	75	114
1	4	4	8	17	17	24	39
1	3		4	9		7	15
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1

O total de caminhos para o canto superior direito é assim 678.

3. Como $[ABC]$ é um triângulo retângulo, pelo teorema do arco capaz, M é o centro da circunferência que passa por A, B e C. De novo pelo teorema do arco capaz, temos assim que a amplitude do ângulo inscrito $\angle ACB$ é metade da do ângulo ao centro $\angle AMB$ pelo que $A\widehat{M}B = 60°$ e $[AMB]$ é equilátero, e $B\widehat{A}M = 60°$ e $M\widehat{A}Q = 30°$.

   Por outro lado ambas as circunferências são simétricas em relação à mediatriz de BC. Isso implica que $C\widehat{M}P = B\widehat{M}A = 60°$. Por outro lado, $\angle MAQ$ e $\angle MPQ$ são ângulos inscritos na mesma circunferência e definindo o mesmo arco pelo que têm a mesma amplitude e $M\widehat{P}Q = 30°$.

   Seja X a interseção da reta PQ com a reta BC. Já vimos que $P\widehat{M}X = 60°$ e $M\widehat{P}X = 30°$ logo $M\widehat{X}P = 90°$ tal como pretendido.

4. Suponhamos que todas as propostas são rejeitadas até ficarem apenas os piratas 99 e 100. Então, qualquer proposta feita pelo pirata 99 será rejeitada pelo pirata 100, porque assim ficará com as moedas todas a seguir. Portanto o pirata 99 tem a certeza de que ficando apenas dois piratas, ele ficará sem nenhuma moeda.

   Suponhamos agora que todas as propostas são rejeitadas até ficarem apenas os piratas 98 a 100. Se o pirata 98 propuser 1 moeda ao pirata 99, este aceitá-la-á. Por outro lado, qualquer proposta feita pelo pirata 98 será rejeitada pelo pirata 100. Portanto, o pirata 98 irá propor 2015 moedas para si próprio e 1 moeda para o pirata 99 e a proposta será aceite pela maioria. O pirata 100 tem a certeza de que ficando apenas três piratas, ele ficará sem nenhuma moeda.

   Repetindo o raciocínio agora apenas com os piratas 97 a 100, vemos que uma proposta do pirata 97 será aceite pelo pirata 98 apenas se lhe oferecer 2016 moedas, pelo pirata 99 se lhe oferecer 2 moedas e pelo pirata 100 se lhe oferecer 1 moeda. Como o pirata 97 precisa de mais dois votos, basta oferecer moedas aos piratas 99 e 100. A proposta de distribuição das moedas desde o pirata 100 até si próprio é portanto $(1, 2, 0, 2013)$.

   Do mesmo modo, ficando apenas

   - 5 piratas, a proposta será $(2, 0, 1, 0, 2013)$.
   - 6 piratas, a proposta será $(0, 1, 2, 1, 0, 2012)$.
   - 7 piratas, a proposta será $(1, 0/2, 0, 0/2, 1, 0, 2012)$. Neste caso, o símbolo $0/2$ significa que o pirata 94 pode oferecer 2 moedas a um dos vários piratas assinalados, à sorte; aos restantes oferece 0 moedas, porque já não necessita de mais votos favoráveis.
   - 8 piratas, a proposta será $(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 2012)$. Neste caso, observe-se que o pirata 93 pode oferecer apenas 1 moeda a cada um dos piratas 97 e 99, uma vez que eles não têm a certeza de que receberão mais do que 1 moeda se a proposta for rejeitada (podem receber 0 ou 2 moedas, dependendo da sorte).
   - 9 piratas, a proposta será $(1, 0/2, 0/2, 0/2, 1, 0/2, 1, 0, 2011)$.

   Note-se que, pelo raciocínio anterior, para cada pirata, as propostas vão alternando entre 0 e 1 ou entre $0/2$ e 1, consoante a paridade do seu número. Logo, em geral, se restarem apenas n piratas e

   - n for par, a proposta será $(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, 2016 - n/2)$.
   - n for ímpar, a proposta será $(1, 0/2, 0/2, 0/2, 1, 0/2, 1, \ldots, 0/2, 1, 0, 2016 - (n + 1)/2)$.

   Portanto, para $n = 100$, a proposta será $(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, 2016 - 100/2)$, ou seja, o pirata 1 propõe para si próprio 1966 moedas de ouro.