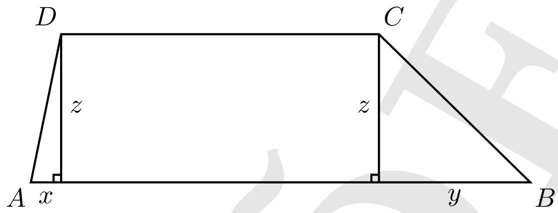
XXXIII OPM - Final - 2º dia - 21.03.2015 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Como $7 \times AB$ tem dois algarismos, então $10 \leq AB \leq 14$. Por outro lado, $C \times AB \geq 120$, pelo que $C = 9$ e $AB = 14$.

5. Designemos por x, y, z as medidas indicadas na figura.



Pelo teorema de Pitágoras, temos $x^2 + z^2 = 10^2$, $y^2 + z^2 = 14^2$ e $x + y = 33 - 21 = 12$.

Logo $y = 12 - x$ e $z^2 = 100 - x^2$, pelo que $(12 - x)^2 + 100 - x^2 = 196$, ou seja, $x = 2$.

Temos $\overline{AC}^2 = (21 + x)^2 + z^2 = 441 + 42x + x^2 + z^2 = 441 + 42 \times 2 + 100 = 625$. Logo $\overline{AC} = 25$.

6. Primeiro observemos que a caixa 0 tem medalhas, pois se não tivesse, todas as caixas, inclusivamente ela própria, teriam medalhas, contradição. Seja a o número de medalhas da caixa 0.

   Como o número de medalhas nas caixas 1 a 9 é igual ao número total de caixas com medalhas, que é o número de caixas 1 a 9 com medalhas mais 1 (porque a caixa 0 tem medalhas), então cada uma dessas caixas tem 1 medalha exceto uma das caixas, que tem 2 medalhas.

   Portanto uma caixa qualquer só pode ter $0, 1, 2$, ou a medalhas, ou seja, há no máximo 4 caixas com medalhas. Logo há pelo menos 6 caixas sem medalhas, ou seja, $a \geq 6$. Então $a \neq 0, 1, 2$, logo há exatamente 4 caixas sem medalhas, donde $a = 6$.

   Portanto a única possibilidade é o número de medalhas das caixas 0 a 9 ser respetivamente $6, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0$.