Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Há $2^5 = 32$ números de cinco algarismos formados apenas com os algarismos 1 ou 2. Destes, metade têm mais algarismos 1 do que algarismos 2. Opção correta: B).

   (b) Como $\angle AED$ é um ângulo externo de $[EDC]$, então $A\widehat{E}D = E\widehat{D}C + E\widehat{C}D$, ou seja, $a + 60 = c + E\widehat{C}D$. Logo $E\widehat{C}D = 60 + a - c$. Analogamente, uma vez que $\angle BFE$ é externo a $[AEF]$, temos $E\widehat{A}F = 60 + b - a$. Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, então $E\widehat{C}D = E\widehat{A}F$, ou seja, $60 + a - c = 60 + b - a$. Logo $2a = b + c$. Opção correta: A).

   (c) O número de páginas lidas desde o dia 1 até ao dia n é $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Para este número ser múltiplo de 30 é necessário que n ou $n+1$ seja múltiplo de 5. Calculando o valor de $\dfrac{n(n+1)}{2}$ para $n = 4, 5, 9, 10, 14, 15, 19, 20, 24, 25, 29, 30$, concluímos que este número é múltiplo de 30 apenas para $n = 15, 20, 24$. Opção correta: D).

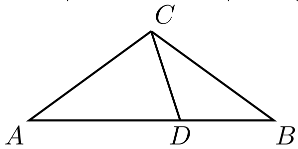
   (d) Sejam $f_1, \ldots, f_8, b$ as somas dos números de cada face lateral e da base da pirâmide. Então $f_1 + f - 2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 - 2b$ é um múltiplo de 3, que é 8 vezes o número que está no vértice da pirâmide. Logo no vértice está o número 3. Como cada f_i é um múltiplo de 3, então os valores do vértices da base são todos 3, ou alternadamente 1 e 2. Como sabemos que não são todos 3, então a soma de todos os vértices é $1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 3 = 15$. Opção correta: C).

2. **Solução 1:** Começamos por escrever o algarismo 5 num dos nove quadrados. De seguida vamos preencher os restantes dois quadrados da linha onde está o 5. Como o 5 está pintado de azul, nessa linha está um número maior do que 5, e outro menor do que 5, e portanto há 4×4 hipóteses de escolher os números que estão na mesma linha que o 5. Como para cada par, há duas hipóteses de os escrever, há 32 hipóteses de preencher a linha que tem o algarismo 5. Sobram seis algarismos, três maiores e três menores do que 5. Se escrevermos três desses algarismos numa linha e os outros três noutra, numa das linhas estão, pelo menos, dois algarismos maiores do que 5, e na outra dois algarismos menores do que 5, e portanto o 5 será sempre o segundo maior algarismo pintado de azul. Concluímos que para preencher as duas linhas que estão vazias não existem restrições, ou seja há $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ maneiras de escrever os seis algarismos que faltam. Temos então que é possível distribuir os algarismos de $9 \times 32 \times 720 = 207360$ maneiras diferentes.

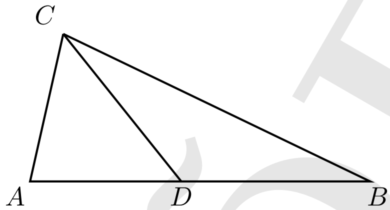
   Solução 2: Começamos por escolher os dois algarismos que estão na mesma linha que o 5. Como o 5 está pintado de azul, nessa linha está um número maior do que 5, e outro menor do que 5, e portanto há 4×4 hipóteses de escolher os números que estão na mesma linha que o 5. Numa das outras linhas há dois algarismos menores do que 5. Como temos ainda disponíveis três desses algarismos, há três hipóteses para os escolher. Para completar a linha, escolhe-se um dos quatro algarismos restantes porque, qualquer que seja a escolha feita, na linha que sobra ficam, pelo menos, dois algarismos maiores do que 5, e portanto o 5 será sempre o segundo maior algarismo pintado de azul. Teríamos assim $3 \times 4 = 12$ maneiras de escolher os algarismos da linha onde o algarismo pintado de azul é menor do que 5. É preciso notar que a hipótese em que os três algarismos da mesma linha são menores do que 5 foi escolhida três vezes, e portanto existem apenas dez maneiras diferentes de escolher essa linha. Finalmente, as linhas podem estar ordenadas de seis maneiras diferentes, e dentro de cada linha há seis maneiras diferentes de ordenar os algarismos. Temos então que é possível distribuir os algarismos de $16 \times 10 \times 6^4 = 207360$ maneiras diferentes.

3. Seja $\alpha = A\widehat{B}C$. Há vários casos a considerar, conforme os lados que são iguais em cada triângulo.

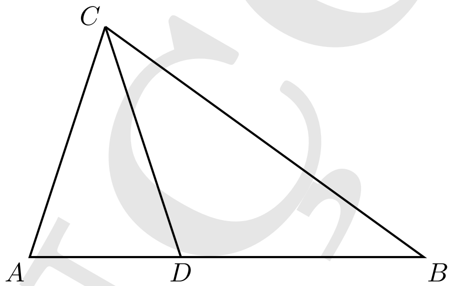
- $\overline{AC} = \overline{AD}$
  Neste caso temos $A\widehat{D}C = A\widehat{C}D < 90$. Logo $B\widehat{D}C > 90$, pelo que $\overline{DC} = \overline{BD}$.
  Logo $A\widehat{D}C = 2A\widehat{B}C = 2\alpha$.
  Se $\overline{BC} = \overline{AC}$, então $180 = A\widehat{B}C + B\widehat{C}A + C\widehat{A}B = \alpha + 3\alpha + \alpha = 5\alpha$, pelo que $\alpha = 36°$.



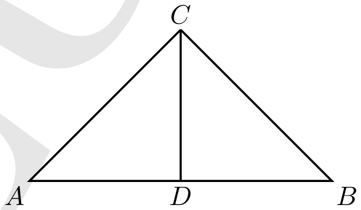
  Se $\overline{BC} = \overline{AB}$, então $B\widehat{A}C = 90 - \alpha/2$. Logo $180 = A\widehat{D}C + D\widehat{C}A + C\widehat{A}D = 2\alpha + 2\alpha + 90 - \alpha/2 = 7\alpha/2$, pelo que $\alpha = \dfrac{180°}{7}$.



- $\overline{AC} = \overline{CD}$
  Neste caso temos $A\widehat{D}C = D\widehat{A}C < 90$. Como anteriormente, conclui-se que $\overline{DC} = \overline{BD}$. Então $\overline{AB} = \overline{BC}$. Logo $180 = A\widehat{D}C + D\widehat{C}A + C\widehat{A}D = 2\alpha + \alpha + 2\alpha = 5\alpha$, pelo que $\alpha = 36°$.



- $\overline{CD} = \overline{AD}$
  Se $\overline{BD} = \overline{CD}$, então tanto $\overline{AC}$ como $\overline{BC}$ são inferiores a $\overline{AD} + \overline{DC}$, pelo que $\overline{AC} = \overline{BC}$. Logo $180 = 4\alpha$, pelo que $\alpha = 45°$.



  Os restantes casos foram já analisados anteriormente, trocando os pontos A e B. Obtemos assim os valores possíveis $\alpha = \dfrac{540°}{7}$ e $\alpha = 72°$.