OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXII OPM - Final - 1° Dia - 04.04.2014 - Categoria Júnior - 6°/7° anos

Duração: 2 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

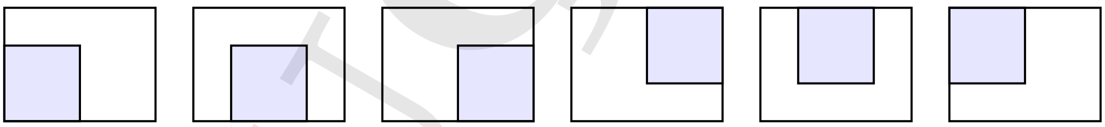
Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Se a Ana gastou 16 euros na viagem, gastou 8 euros na ida e 8 no regresso. Da viagem de regresso o Mário deverá pagar metade, e da viagem de ida, metade da metade, ou seja, um quarto. Portanto, o Mário deverá pagar $4 + 2 = 6$ euros. Opção correta: B).

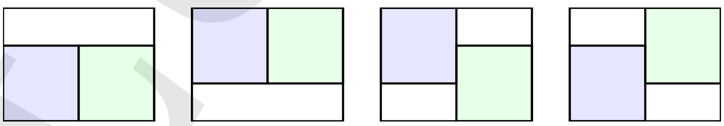
   (b) Se x for o número de pratos na mesa das entradas e y o número de pratos na mesa dos pratos principais, no dia em que o Mário foi ao restaurante, há $x \times y = 60$ maneiras diferentes de escolher o almoço. Tem-se também que $78 = (x + 2)(y - 2)$. Os divisores de 60 são $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$; os divisores de 78 são $1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78$. Pretende-se encontrar um divisor de 60, o y, e um divisor de 78, cuja diferença seja 2. Os pares possíveis são $(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$ e $(15, 13)$. Se $y = 3$ então $x = 20$ e $(20+2)\times 1 \neq 78$; se $y = 4$ então $x = 15$ e $(15+2)\times 2 \neq 78$; se $y = 5$ então $x = 12$ e $(12+2)\times 3 \neq 78$; portanto $y = 15$. Opção correta: C).

   (c) Havendo comboios que param de 2 em 2 estações, outros de 3 em 3 estações e outros que param de 5 em 5 estações, todos os comboios param na mesma estação de 30 em 30 estações, uma vez que 30 é o mínimo múltiplo comum de 2, 3 e 5. O resto da divisão de 2014 por 30 é 4, ou seja, todos os comboios que partem da estação 4 param na estação 2014. A partir da estação 4, de 30 em 30 estações temos a mesma propriedade. Uma vez que $1000 = 30 \times 33 + 10$ então, além da estação 4, há mais 33 estações com a propriedade pretendida, ou seja, 34 no total. Opção correta: D).

   (d) Se o Mário só usar cubos com 1 dm de aresta tem uma forma de encher a caixa. Usando apenas um cubo com 2 dm de aresta e todos os outros com 1 dm de aresta, pode colocar o cubo grande em 6 posições diferentes no fundo da caixa e em outras seis se o colocar junto à tampa, ou seja, com um cubo grande há 12 maneiras diferentes de encher a caixa.

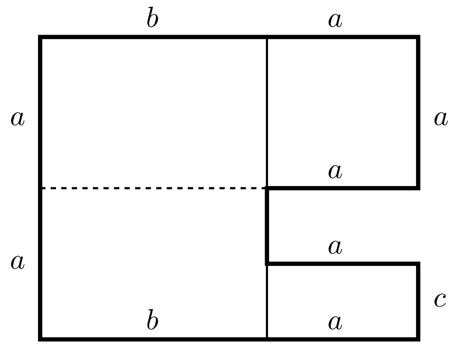


Usando dois cubos com 2 dm de aresta e os restantes com 1 dm de aresta, há 4 formas de os colocar no fundo da caixa.

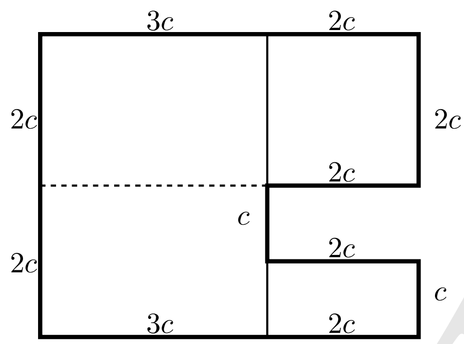


Além destas 4, há mais três hipóteses para cada uma destas configurações: colocar um dos cubos no fundo e o outro junto à tampa, colocar um junto à tampa e o outro no fundo, ou colocar ambos junto à tampa, ou seja, $4 \times 4 = 16$ novas possibilidades. Portanto, há $1 + 12 + 16 = 29$ maneiras diferentes de encher a caixa com cubos. Opção correta: C).

2. Sejam a, b e c os comprimentos do lado da piscina, da largura da casa e da largura do relvado, respetivamente, como se indica na figura seguinte.



Como a área da piscina é igual ao dobro da área do relvado, temos $a^2 = 2ac$, donde se conclui que $a = 2c$. Além disso, como a área da casa é o triplo da área da piscina, então $3a^2 = 2ab$, ou sejam, $12c^2 = 4cb$, o que implica $b = 3c$. Assim, a figura do terreno do João fica:



Então, dado que o perímetro do terreno é igual a 132 metros temos

$$22c = 132 \Leftrightarrow c = 6.$$

Logo a área da casa do João é igual a $12c^2 = 432$ m^2.

3. A Eunice mentiu pois disse que ficou em primeiro lugar, mas quem ficou em primeiro mentiu. Portanto a Eunice ficou em último lugar.

   Como o Duarte disse que não ficou nos três primeiros, se estivesse a dizer a verdade teria ficado em quarto lugar. Mas então tanto o Carlos como a Beatriz estariam a mentir, o que não é possível. Portanto o Duarte está a mentir, ou seja, o Duarte ficou em primeiro lugar.

   Assim, os restantes três corredores estão a dizer a verdade. Portanto o Carlos ficou em quarto lugar. Como a Alexandra está a dizer a verdade, sabemos que a Alexandra ficou atrás da Beatriz. Concluímos então que a ordenação final foi: Duarte, Beatriz, Alexandra, Carlos e Eunice. Quem ficou em terceiro lugar foi a Alexandra.