OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

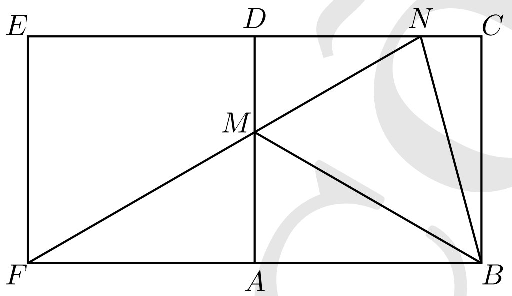
XXXII OPM - Final - 1º Dia - 04.04.2014 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. O problema é equivalente ao de saber qual é o maior número de sinais "$-$" que se podem usar na igualdade $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 64 = 2014$. Seja X o conjunto dos inteiros entre 1 e 64 que nessa igualdade ficam afetados com o sinal "$-$". Ao subtrair $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 64$ a $1 + 2 + 3 + \cdots + 64$, os números afetados com o sinal "$+$" cancelam, enquanto que os elementos de X dobram. Assim, se s for a soma dos elementos de X, então $1 + 2 + 3 + \cdots + 64 - 2014 = 2s$. Ora $1 + 2 + 3 + \cdots + 64 = \frac{64 \times 65}{2} = 2080$, pelo que se tem $s = 33$. Como $1 + 2 + 3 + \cdots 7 + 8 = \frac{8 \times 9}{2} = 36 > 33$, o número 33 não pode ser decomposto como uma soma de mais do que 7 elementos não repetidos de $\{1, \ldots, 64\}$. Por outro lado, 33 admite a decomposição $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 12 = 33$, pelo que se conclui que o número máximo de elementos que X pode ter é 7. Logo, o navio navegou no máximo 7 dias para sul.

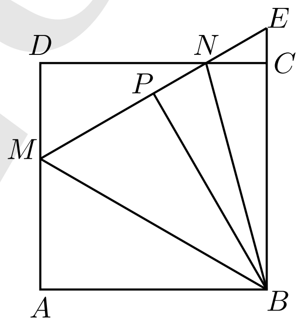
2. **Solução 1:** Sejam E e F pontos tais que D é o ponto médio de $[EC]$ e A é o ponto médio de $[FC]$. Assim, $[ADEF]$ é um quadrado.



Os triângulos $[ABM]$ e $[AFM]$ têm ambos um ângulo reto, um lado comum e um lado igual, logo são congruentes. Portanto $F\widehat{M}A = B\widehat{M}A = 60°$, ou seja, F, M e N são colineares.

Como $\cos E\widehat{F}N = \cos 60° = 1/2$, então $\overline{FN} = 2\overline{EF} = \overline{FB}$, ou seja, $[FNB]$ é isósceles. Portanto $F\widehat{B}N = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$, donde $M\widehat{B}N = 75° - 30° = 45°$.

Solução 2: Seja F o ponto de interseção de $[MN]$ com $[BE]$. Seja P o pé da perpendicular a $[MN]$ que passa por B.



Os triângulos $[ABM]$ e $[PBM]$ são congruentes porque $M\widehat{A}B = M\widehat{P}B = 90°$, $A\widehat{M}B = P\widehat{M}B = 60°$ e $[MB]$ é um lado comum. Portanto $\overline{PB} = \overline{CB}$. têm ambos um ângulo reto, um lado comum e um lado igual, logo são congruentes. Portanto $F\widehat{M}A = B\widehat{M}A = 60°$, ou seja, F, M e N são colineares.

Como $\cos E\widehat{F}N = \cos 60° = 1/2$, então $\overline{FN} = 2\overline{EF} = \overline{FB}$, ou seja, $[FNB]$ é isósceles. Portanto $F\widehat{B}N = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$, donde $M\widehat{B}N = 75° - 30° = 45°$.

3. A solução é $3n+1$.

   Comecemos por provar que $3n$ não é suficiente. Mostremos que quaisquer que sejam as $3n$ casas que a Beatriz escolha, existe uma escolha da Amélia para a qual a Beatriz falha todos os "tiros". Entre as $2n$ linhas do tabuleiro, escolhemos as n em que a Beatriz selecionou menos casas. No total estas linhas contêm no máximo n escolhas da Beatriz: se fossem mais, existiria uma linha no conjunto com mais de uma casa, enquanto como nas n linhas restantes estariam selecionadas menos de $2n$ casas alguma teria apenas uma, e não teríamos selecionado as linhas com menos casas atacadas.

   Mas então nestas n linhas, um máximo de n colunas contêm casas escolhidas pela Beatriz, ou seja, pelo menos n colunas não foram atacadas. Se a Amélia tivesse escolhido esta combinação de linhas e colunas então a Beatriz não teria acertado em nenhuma peça.

   Mostremos agora que $3n+1$ é suficiente. Consideremos as linhas e colunas indexadas de 1 a $2n$, e admitamos que a Beatriz escolhe as $2n$ casas $(1,1)$, $(2,2)$, ..., $(2n,2n)$, as n casas $(1,2)$, $(2,3)$, ..., $(n,n+1)$ e ainda a casa $(n+1,1)$. Queremos mostrar que é impossível a Amélia escapar. Como todas as casas da diagonal foram escolhidas, a Amélia não pode ter escolhido uma linha e uma coluna indexada pelo mesmo número, o que significa que o conjunto I dos índices das linhas escolhidas é complementar do conjunto J dos índices das colunas escolhidas (uma vez que a cardinalidade de cada um é n e são disjuntos).

   Suponhamos que $1 \in I$. Então, como $(1,2)$ foi atacada, a coluna 2 não pode ter sido escolhida, logo a linha 2 foi escolhida. Mas agora $(2,3)$ foi atacada, pelo que pelo mesmo raciocínio $3 \in I$ e assim por diante até $n+1 \in I$. Isto implica que foram selecionadas $n+1$ linhas, o que é impossível. Assim, 1 teria de estar em J, o que como $(n+1,1)$ foi selecionada implica que $n+1 \in J$.

   Se alguma linha com índice $1 < k < n+1$ for selecionada o argumento acima, como $(k,k+1)$ foi atacada, implica $\{k, k+1, k+1, \cdots, n+1\} \subseteq I$, pelo que $n+1 \in I \cap J$ o que não pode acontecer. Então $\{1, ..., n+1\} \subseteq J$, o que por sua vez é também impossível. Concluímos assim que não há qualquer forma da Amélia colocar as suas peças de forma a não ter pelo menos uma delas atingida.