OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXII OPM - Final - 1º dia - 04.04.2014 - Categoria A - 8º/9º anos

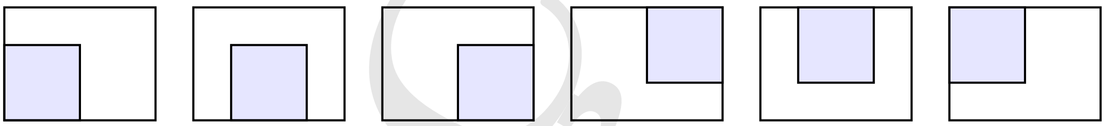
Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

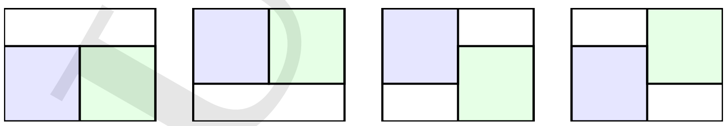
1. (a) Se x for o número de pratos na mesa das entradas e y o número de pratos na mesa dos pratos principais, no dia em que o Mário foi ao restaurante, há $x \times y = 60$ maneiras diferentes de escolher o almoço. Tem-se também que $78 = (x+2)(y-2)$. Os divisores de 60 são $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$; os divisores de 78 são $1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78$. Pretende-se encontrar um divisor de 60, o y, e um divisor de 78, cuja diferença seja 2. Os pares possíveis são $(3,1)$, $(4,2)$, $(5,3)$ e $(15,13)$. Se $y = 3$ então $x = 20$ e $(20+2)\times 1 \neq 78$; se $y = 4$ então $x = 15$ e $(15+2)\times 2 \neq 78$; se $y = 5$ então $x = 12$ e $(12+2)\times 3 \neq 78$; portanto $y = 15$. Opção correta: C).

   (b) Havendo comboios que param de 2 em 2 estações, outros de 3 em 3 estações e outros que param de 5 em 5 estações, todos os comboios param na mesma estação de 30 em 30 estações, uma vez que 30 é o mínimo múltiplo comum de 2, 3 e 5. O resto da divisão de 2014 por 30 é 4, ou seja, todos os comboios que partem da estação 4 param na estação 2014. A partir da estação 4, de 30 em 30 estações temos a mesma propriedade. Uma vez que $1000 = 30 \times 33 + 10$ então, além da estação 4, há mais 33 estações com a propriedade pretendida, ou seja, 34 no total. Opção correta: D).

   (c) Se o Mário só usar cubos com 1 dm de aresta tem uma forma de encher a caixa. Usando apenas um cubo com 2 dm de aresta e todos os outros com 1 dm de aresta, pode colocar o cubo grande em 6 posições diferentes no fundo da caixa e em outras seis se o colocar junto à tampa, ou seja, com um cubo grande há 12 maneiras diferentes de encher a caixa.



   Usando dois cubos com 2 dm de aresta e os restantes com 1 dm de aresta, há 4 formas de os colocar no fundo da caixa.

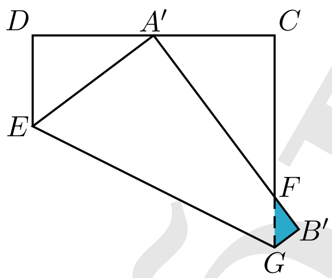


   Além destas 4, há mais três hipóteses para cada uma destas configurações: colocar um dos cubos no fundo e o outro junto à tampa, colocar um junto à tampa e o outro no fundo, ou colocar ambos junto à tampa, ou seja, $4 \times 4 = 16$ novas possibilidades. Portanto, há $1 + 12 + 16 = 29$ maneiras diferentes de encher a caixa com cubos. Opção correta: C).

   (d) Se o Mário der 8 cartas à irmã, poderá ter 8 de um naipe (copas), 2 de outro e 2 do outro e não satisfaz o que pretendia. Se o Mário entregar 7 cartas à irmã, na pior das hipóteses ele retiraria as cartas dos naipes que têm menos, espadas e paus. Destes dois naipes ele tem 12 cartas, retirando 7, ficaria com 5 cartas, logo ele fica com mais de 2 cartas num destes naipes (porque se ambos tivessem 2 cartas ele só teria 4). Portanto, o Mário consegue sempre 4 cartas de um naipe (copas) e três de um destes dois naipes. Opção correta: C).

2. O problema é equivalente ao de saber qual é o maior número de sinais "$-$" que se podem usar na igualdade $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 64 = 2014$. Seja X o conjunto dos inteiros entre 1 e 64 que nessa igualdade ficam afetados com o sinal "$-$". Ao subtrair $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 64$ a $1 + 2 + 3 + \cdots + 64$, os números afetados com o sinal "$+$" cancelam, enquanto que os elementos de X dobram. Assim, se s for a soma dos elementos de X, então $1 + 2 + 3 + \cdots + 64 - 2014 = 2s$. Ora $1 + 2 + 3 + \cdots + 64 = \frac{64 \times 65}{2} = 2080$, pelo que se tem $s = 33$. Como $1 + 2 + 3 + \cdots 7 + 8 = \frac{8 \times 9}{2} = 36 > 33$, o número 33 não pode ser decomposto como uma soma de mais do que 7 elementos não repetidos de $\{1, \ldots, 64\}$. Por outro lado, 33 admite a decomposição $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 12 = 33$, pelo que se conclui que o número máximo de elementos que X pode ter é 7. Logo, o navio navegou no máximo 7 dias para sul.

3. Seja $[ABCD]$ o quadrado do António e E, F, G, A' e B' os pontos assinalados na figura seguinte.



Seja $x = \overline{AE} = \overline{EA'}$. Então $\overline{ED} = 40 - x$. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado a $[DA'E]$ tem-se que $(40 - x)^2 + 20^2 = x^2$, donde se conclui que $x = 25$.

Por outro lado, como $[DA'E]$ e $[CFA']$ são semelhantes, obtém-se

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'F}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EA'}},$$

ou seja, $\dfrac{20}{\overline{A'F}} = \dfrac{15}{25}$, pelo que $\overline{A'F} = \dfrac{100}{3}$.

Uma vez que $\overline{A'B'} = 40$, tem-se que $\overline{FB'} = 40 - \dfrac{100}{3} = \dfrac{20}{3}$. Além disso, $[B'FG]$ e $[DA'E]$ são semelhantes, logo

$$\frac{\overline{FB'}}{\overline{GB'}} = \frac{\overline{A'D}}{\overline{ED}},$$

ou seja, $\dfrac{20/3}{\overline{GB'}} = \dfrac{20}{15}$, donde se conclui que $\overline{GB'} = 5$.

Portanto, a área do triângulo sombreado mede $\dfrac{\overline{FB'} \times \overline{GB'}}{2} = \dfrac{20/3 \times 5}{2} = \dfrac{50}{3}$ cm^2.