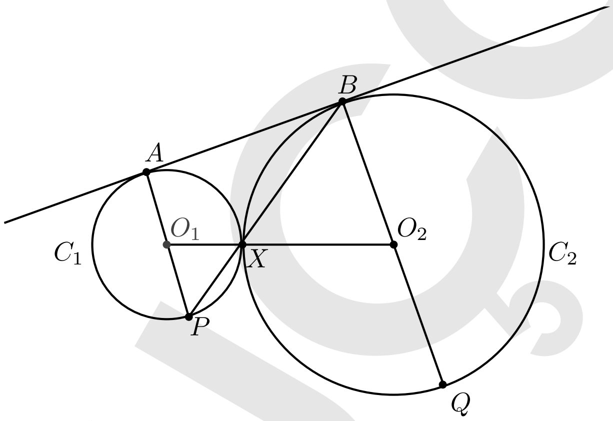
Cada questão vale 10 pontos

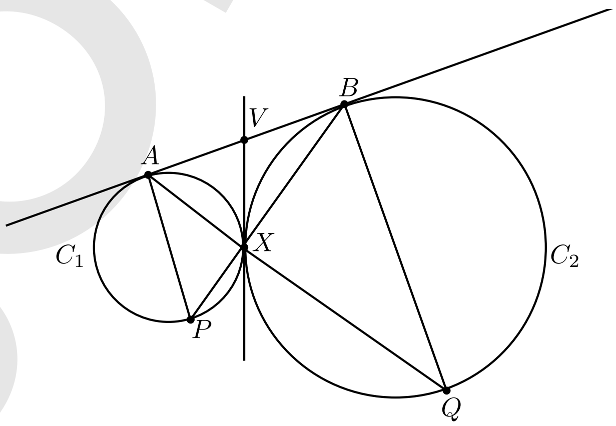
Sugestões para a resolução dos problemas

1. Sejam a a idade atual do Alberto, b a idade atual da Beatriz e k o número de anos passados desde que o Alberto tinha mais dois anos do que a Beatriz tem hoje. Da frase do Alberto conclui-se que $a-k=b+2$ e a frase da Beatriz significa que $b-k=\dfrac{a+11}{12}$. Assim $k=a-b-2=b-\frac{a+11}{12}$, de onde se conclui que $a=1+\frac{24b}{13}$. Portanto, a idade da Beatriz é um múltiplo de 13 e como a Beatriz é adolescente podemos concluir que $b=13$. Logo $a=1+24=25$, ou seja, o Alberto tem hoje 25 anos.

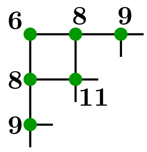
2. **Solução 1:** Sejam O_1 e O_2 os centros das circunferências C_1 e C_2, respetivamente e $[BQ]$ um diâmetro de C_2. Os diâmetros $[AP]$ e $[BQ]$ são paralelos, uma vez que são ambos perpendiculares à reta tangente AB, logo $P\hat{O}_1X=X\hat{O}_2B$ e $A\hat{O}_1X=X\hat{O}_2Q$. Tem-se também $A\hat{P}X=\frac{1}{2}A\hat{O}_1X=\frac{1}{2}X\hat{O}_2Q=X\hat{B}Q$. Os triângulos $[O_1PX]$ e $[O_2BX]$ têm dois ângulos congruentes, logo também $O_1\hat{X}P=B\hat{X}O_2$. Uma vez que O_1, X e O_2 são colineares, os pontos P, X e B pertencem à mesma reta.



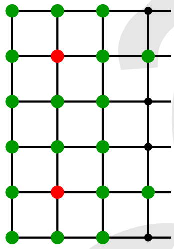
Solução 2: Seja $[BQ]$ um diâmetro de C_2. Os triângulos $[AXP]$ e $[BXQ]$ são retângulos em X porque $[AP]$ e $[BQ]$ são diâmetros. Seja V o ponto de interseção da tangente interior às circunferências com a reta AB. Sejam $\alpha=A\hat{X}V$ e $\beta=B\hat{X}V$. Como VA e VX são tangentes a C_1, então $X\hat{A}V=\alpha$. De forma análoga, $X\hat{B}V=\beta$. Considerando os ângulos internos do triângulo $[ABX]$ tem-se $2\alpha+2\beta=180°$, logo $\alpha+\beta=90^o$ e, portanto $P\hat{X}B=P\hat{X}A+\alpha+\beta=180°$, ou seja P, X e B pertencem à mesma reta.



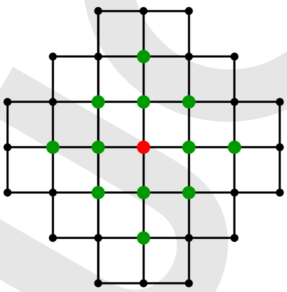
3. O ponto de água que garante o abastecimento de um canto do bairro pode ser colocado em 6 interseções diferentes. A figura seguinte ilustra os pontos de água que cobrem o canto superior esquerdo e em cada um é indicado o número de interseções por ele cobertas.



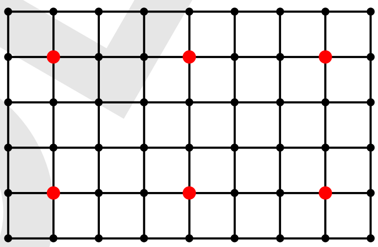
Assim, um ponto de água que abasteça um canto do bairro cobre, no máximo, 11 interseções. Se usarmos os pontos de água que cobrem 11 interseções para cobrir dois dos cantos mais próximos, assinalados a vermelho na figura seguinte, cobrimos apenas 20 interseções e nenhum outro par de pontos de água cobre mais interseções (uma vez que $11 + 9 = 20$).



Portanto para abastecer os quatro cantos com apenas quatro pontos de água, cobrimos no máximo 40 interseções. Sobram $54 - 40 = 14$ interseções por cobrir. No entanto, quando colocamos um ponto de água numa interseção este cobre, no máximo, 13 interseções, como indicado na figura seguinte.



Portanto são necessários pelo menos mais dois pontos pontos de água. O esquema da figura seguinte mostra que é possível respeitar a recomendação dos bombeiros com 6 pontos de água.



Portanto 6 é o número mínimo de pontos de água que respeita a recomendação dos bombeiros.

SOLUÇÕES

4. Dado um conjunto X de inteiros consecutivos, sejam $V(X)$ o número de elementos de X de cor vermelha, $A(X)$ o número de elementos de X de cor azul e $D(X) = V(X) - A(X)$.

Dado um inteiro $n \geq 0$, seja $I_n = \{n, n+1, n+2, \ldots, n+2013\}$. Uma vez que $V(I_n) + A(I_n) = 2014$ é par, então $D(I_n) = V(I_n) - A(I_n)$ também é par. Comparando I_n com I_{n+1}, verifica-se que o número de elementos de cada cor altera-se no máximo em uma unidade (por excesso ou por defeito), pelo que $D(I_n) - 2 \leq D(I_{n+1}) \leq D(I_n) + 2$.

Suponha-se que não existe $n \geq 0$ tal que $D(I_n) = 0$. Sem perda de generalidade, pode-se então supor que $D(I_0) \geq 2$. Mostra-se de seguida por indução que $D(I_n) \geq 2$, para todo $n \geq 0$. O caso base é válido por hipótese. Suponha-se que $D(I_n) \geq 2$. Então $D(I_{n+1}) \geq D(I_n) - 2 \geq 0$. Como $D(I_{n+1})$ é par e não é zero, necessariamente $D(I_{n+1}) \geq 2$, o que conclui a prova de que $D(I_n) \geq 2$, para todo $n \geq 0$.

Considerem-se agora os conjuntos da forma I_{2014k}, com $0 \leq k \leq 503$. Estes conjuntos são disjuntos dois a dois e $D(I_{2014k}) \geq 2$. Seja X a união destes conjuntos. Então

$$D(X) \geq 504 \times 2 = 1008$$

o que contradiz uma das hipóteses.

Para evitar a contradição, tem-se necessariamente $D(I_n) = 0$ para algum $n \geq 0$, ou seja, existe um conjunto de 2014 inteiros consecutivos não negativos tais que metade deles tem cor vermelha e a outra metade tem cor azul.

SOLUÇÕES