XXXII OPM - 1ª Eliminatória - 13.11.2013 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

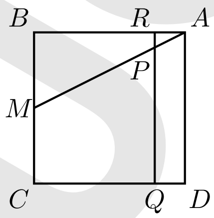
1. (a) Opção A.
   (b) Opção D.
   (c) Opção B.
   (d) Opção B.

2. A sucessão começa do seguinte modo:

$$13,\ 11,\ 2013,\ 12,\ 10,\ 2012,\ 11,\ 9,\ 2011,\ 10,\ 8,\ 2010,\ 9,\ldots$$

Com efeito, como os números nas posições 2, 3 e 4 somam $2036 = 2037 - 1$, o número na posição $4 = 1 + 3$ obtém-se do número na posição 1 subtraindo-lhe uma unidade, ou seja, na posição 4 encontra-se o número 12. Do mesmo modo, como os números nas posições 3, 4 e 5 somam $2035 = 2036 - 1$, o número na posição $5 = 2 + 3$ obtém-se do número na posição 2 subtraindo-lhe uma unidade, ou seja, na posição 5 encontra-se o número 10. Em geral, o número numa determinada posição é superior em uma unidade ao número na posição três unidades à frente. Como $2013 = 3 \times 671$, conclui-se que o número na posição 2013 obtém-se do número na posição 3 subtraindo 670, ou seja, na posição 2013 encontra-se o número 1343.

3. Sejam A, B, C e D os vértices do quadrado, M o ponto médio de $[BC]$, P o ponto entre A e M tal que $4\overline{AP} = \overline{MP}$ e Q o ponto no segmento $[CD]$ tal que CD é perpendicular a PQ. Prolongando $[PQ]$ até intersetar AB obtemos o ponto R.



Assim A, M e P representam as três aldeias e $[PQ]$ a nova estrada. Os triângulos $[RAP]$ e $[BAM]$ são semelhantes e a razão de semelhança é

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AP} + \overline{MP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AP} + 4\overline{AP}} = \frac{1}{5}.$$

Assim $\overline{RP} = \dfrac{\overline{BM}}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$km. Então $\overline{PQ} = \overline{RQ} - \overline{RP} = 10 - 1 = 9$km.

4. Como o Alexandre terminou na posição 21, houve 20 corredores que ficaram à frente dele. Então, $20 \times 3 = 60$ corredores ficaram atrás do Daniel. Seja N o número de corredores que ficaram à frente do Daniel e $2N$ o número de corredores que ficaram atrás do Alexandre. Então, ao todo, houve $20 + 1 + 2N$ corredores (os que ficaram à frente do Alexandre, o Alexandre, e os que ficaram atrás do Alexandre). Por outro lado, o número de corredores também é igual a $N + 1 + 60$ corredores (os que ficaram à frente do Daniel, o Daniel, e os que ficaram atrás do Daniel). Logo

$$20 + 1 + 2N = N + 1 + 60,$$

pelo que $N = 40$. Portanto participaram na maratona $20 + 1 + 2 \times 40 = 101$ corredores.