Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. **Solução 1**: O José tem $26 \times 36 = 936$ livros. Destes, $936 - 8 = 928$ ficaram distribuídos igualmente pelo número de caixotes restantes, pelo que esse número é um divisor de 928. Por outro lado, como o João tinha inicialmente 26 caixotes, o número de caixotes restantes é menor do que 26 e como restaram 8 livros que não se conseguiram dividir pelos caixotes restantes, terá de ser maior que 8.

   Como $928 = 2^5 \times 29$ os seus divisores são

$$\{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 29, 2 \times 29, 2^2 \times 29, 2^3 \times 29, 2^4 \times 29, 2^5 \times 29\}.$$

   O único destes divisores entre 8 e 26 é o $2^4 = 16$, pelo que restaram 16 caixotes, tendo sido reciclados $26 - 16 = 10$ caixotes.

   Solução 2: Note-se que o número de caixotes restantes é maior do que 8, por restarem 8 livros por distribuir, pelo que o número de caixotes reciclados é no máximo 17. A tabela seguinte indica a quantidade possível de caixotes reciclados, livros a redistribuir, caixotes restantes e livros que sobrariam.

Caixotes reciclados	Livros a redistribuir	Caixotes Restantes	Livros que sobram
1	$1 \times 36 = 36$	25	11
2	$2 \times 36 = 72$	24	0
3	$3 \times 36 = 108$	23	16
4	$4 \times 36 = 144$	22	12
5	$5 \times 36 = 180$	21	12
6	$6 \times 36 = 216$	20	16
7	$7 \times 36 = 252$	19	5
8	$8 \times 36 = 288$	18	0
9	$9 \times 36 = 324$	17	1
10	$10 \times 36 = 360$	16	8
11	$11 \times 36 = 396$	15	6
12	$12 \times 36 = 432$	14	12
13	$13 \times 36 = 468$	13	0
14	$14 \times 36 = 504$	12	0
15	$15 \times 36 = 540$	11	1
16	$16 \times 36 = 576$	10	6
17	$17 \times 36 = 612$	9	0

   Observa-se que o único caso em que sobram 8 livros ocorre quando são reciclados 10 caixotes.

2. **Solução 1:** Observe-se primeiro que $1+2+3+4+5+6+7 = 28$. Entre os $2^7 = 128$ resultados possíveis para os jogos durante a semana, há 8 formas distintas de o César terminar a semana com 14 pontos, empatando com o Alexandre:

$$\begin{array}{llll} 7+6+1, & 7+5+2, & 7+4+3, & 7+4+2+1, \\ 5+4+3+2, & 6+4+3+1, & 6+5+2+1, & 6+5+3. \end{array}$$

   Por outro lado, há tantas formas de o César terminar a semana com mais pontos do que o Alexandre, como de o Alexandre terminar com mais pontos do que o César.

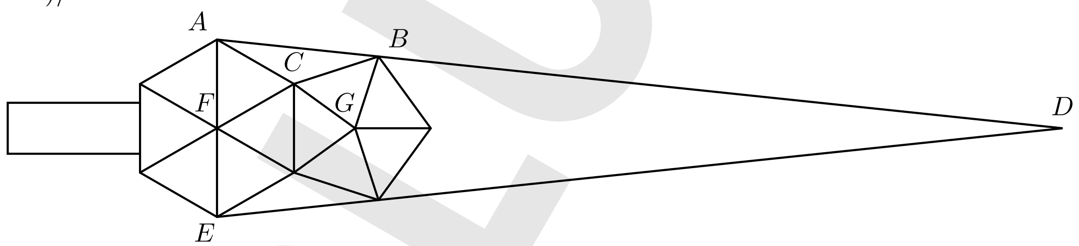
   Logo há $\frac{128-8}{2} = 60$ formas de o César obter mais pontos do que o Alexandre.

Solução 2: Observe-se primeiro que $1+2+3+4+5+6+7=28$. Logo, para que o César obtenha mais pontos, terá que obter pelo menos 15 pontos.

- Suponha-se primeiro que o César ganha nos três últimos dias da prova. Então o César obterá mais pontos do que o Alexandre, independentemente dos resultados nos quatro primeiros dias. Há $2\times 2\times 2\times 2=16$ resultados possíveis para o conjunto dos quatro primeiros dias.
- Suponha-se agora que o César ganha nos dois últimos dias da prova, mas perde no quinto dia. Como $6+7=13$, o César não obterá mais pontos do que o Alexandre apenas se também perder nos segundo, terceiro e quarto dias. Logo há $16-2=14$ resultados possíveis para o conjunto dos quatro primeiros dias que permitem ao César obter mais pontos.
- Suponha-se agora que o César ganha nos quinto e sétimo dias, mas perde no sexto dia. Como $5+7=12$, o César não obterá mais pontos do que o Alexandre apenas se também perder nos terceiro e quarto dias, e pelo menos no primeiro ou no segundo dia. Logo há $16-3=13$ resultados possíveis para o conjunto dos quatro primeiros dias que permitem ao César obter mais pontos.
- Suponha-se agora que o César ganha nos quintos e sexto dias, mas perde no sétimo dia. Se ganhar no quarto dia, então o César obterá mais pontos do que o Alexandre, independentemente dos $2\times 2\times 2=8$ resultados possíveis para os três primeiros dias.
  Se perder no quarto dia, então o César obterá mais pontos do que o Alexandre apenas se ganhar no terceiro dia e em pelo menos mais algum dia, o que dá mais 3 possibilidades.
- Suponha-se agora que o César ganha no sétimo dia e perde nos quinto e sexto dias. Então para que obtenha mais pontos do que o Alexandre, tem que ganhar nos terceiro e quarto dias, e em pelo menos um dos dois primeiros dias. Isto dá mais 3 possibilidades.
- Suponha-se agora que o César ganha no sexto dia e perde nos quinto e sétimo dias. Então para que obtenha mais pontos do que o Alexandre, tem que ganhar nos segundo, terceiro e quarto dias, independentemente do resultado no primeiro dia. Isto dá mais 2 possibilidades.
- A única possibilidade que resta para que o César obtenha mais pontos do que o Alexandre, é aquela em que vence nos cinco primeiros dias e perde nos dois últimos.

Logo há $16+14+13+8+3+3+2+1=60$ formas de o César obter mais pontos do que o Alexandre.

3. Unindo o centro G do pentágono a cada um dos seus vértices, obtêm-se 5 triângulos isósceles congruentes. Cada um destes triângulos tem um ângulo de amplitude $360/5=72^\circ$ em G e dois ângulos de amplitude $(180-72)/2=54^\circ$.



Da mesma forma, unindo o centro F do hexágono a cada um dos seus vértices, obtêm-se 6 triângulos equiláteros congruentes. Então $A\widehat{C}B=360-2\times 60-2\times 54=132^\circ$. Os lados do pentágono regular e do hexágono regular têm o mesmo comprimento, logo $[ACB]$ é isósceles e $B\widehat{A}C=C\widehat{B}A=(180-132)/2=24^\circ$, pelo que $E\widehat{A}D=A\widehat{E}D=60+24=84^\circ$. Portanto, $A\widehat{D}E=180-2\times 84=12^\circ$.

4. Designe-se por a a quantidade inicial de objetos bonitos e úteis e por b a quantidade de objetos bonitos e inúteis. Como b corresponde a $1/9$ do número final de objetos, então o número final de objetos é $9b$ e o número de objetos feios e úteis é $9b/4$. Além disso, o número final de objetos bonitos e úteis é igual a $9b-b-9b/4=23b/4$.

   Como inicialmente o número de objetos úteis era $4/7$ do total e o número de objetos bonitos era $2/5$ do total, então
$$\frac{7}{4}\left(a+\frac{9b}{4}\right)=\frac{5}{2}(a+b)$$
   pelo que $a=23b/12$. Logo, o número final de objetos bonitos e úteis é $\dfrac{23b/4}{23b/12}=3$ vezes o número inicial.