Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Sejam F a quantidade de farinha, L a quantidade de leite e A a quantidade de açúcar. Então, segundo a receita da Isabel, temos que $F = 2L$ e $A = \frac{1}{3}F$, pelo que $A = \frac{2}{3}L$. Para que o peso total da massa do bolo seja 1100 g, é necessário que

$$L + 2L + \frac{2}{3}L = 1100,$$

o que equivale a ter

$$\frac{11}{3}L = 1100.$$

Conclui-se então que para que o bolo pese 1100 g, é necessário usar 300 g de leite.

2. Para cada lançamento que acertou na região vermelha, um outro atingiu a região laranja, o que dá um total de 18 pontos. Como $12 \times 18 = 216$ é maior que 200, então a Raquel acertou no máximo onze vezes na região vermelha. No quadro seguinte estão as várias possibilidades de distribuição de pontos.

Lançamentos V e L	Pontos V e L	Pontos A
1	$1 \times 18 = 18$	$200 - 18 = 172$
2	$2 \times 18 = 36$	$200 - 36 = 166$
3	$3 \times 18 = 54$	$200 - 54 = 146$
4	$4 \times 18 = 72$	$200 - 72 = 128$
5	$5 \times 18 = 90$	$200 - 90 = 110$
6	$6 \times 18 = 108$	$200 - 108 = 92$
7	$7 \times 18 = 126$	$200 - 126 = 74$
8	$8 \times 18 = 144$	$200 - 144 = 56$
9	$9 \times 18 = 162$	$200 - 162 = 38$
10	$10 \times 18 = 180$	$200 - 180 = 20$
11	$11 \times 18 = 198$	$200 - 198 = 2$

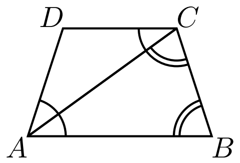
Repare-se que o número de pontos obtidos na região amarela é um múltiplo de cinco, já que é esse o valor de cada lançamento nessa região. Isto acontece apenas em dois casos.

No primeiro destes casos, cinco lançamentos acertaram na região vermelha e cinco na região laranja. Nesse caso, foram obtidos 110 pontos na região amarela, o que corresponde a 22 lançamentos. Assim, a Raquel acertou $5 + 5 + 22 = 32$ vezes no alvo.

No segundo caso, dez lançamentos acertaram na região vermelha e dez na região laranja. Nesse caso, foram obtidos 20 pontos na região amarela, o que corresponde a 4 lançamentos. Assim, a Raquel acertou $10 + 10 + 4 = 24$ vezes no alvo.

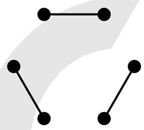
Como a Raquel errou um quarto dos lançamentos, o número de lançamentos no alvo corresponde a três quartos do total, pelo que o número total de lançamentos será quatro terços do número de lançamentos no alvo. Assim as possibilidades seriam $\frac{4}{3} \times 32 = \frac{128}{3}$ ou $\frac{4}{3} \times 24 = \frac{96}{3} = 32$. Como o número de lançamentos é um número inteiro, apenas o segundo caso é possível, ou seja, a Raquel efetuou 32 lançamentos (10 na região vermelha, 10 na laranja, 4 na amarela e 8 falhados).

3. Sendo $[ABCD]$ um trapézio isósceles de lados paralelos $[AB]$ e $[CD]$, tem-se $D\widehat{A}B = A\widehat{B}C$. Tem-se também $D\widehat{A}C = D\widehat{C}A$, porque $[ACD]$ é um triângulo isósceles de base $[AC]$, e ainda $D\widehat{C}A = C\widehat{A}B$, porque AB e CD são retas paralelas. Logo $A\widehat{B}C = D\widehat{A}B = 2 \times C\widehat{A}B$. Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles de base $[BC]$, deduz-se que $A\widehat{C}B = 2 \times C\widehat{A}B$. Logo a soma dos ângulos internos de $[ABC]$ é $5 \times C\widehat{A}B$. Ou seja, $C\widehat{A}B = \frac{180^{\text{o}}}{5} = 36^{\text{o}}$. Finalmente, $A\widehat{D}C = 180^{\text{o}} - D\widehat{A}C - D\widehat{C}A = 180^{\text{o}} - 2 \times 36^{\text{o}} = 108^{\text{o}}$.

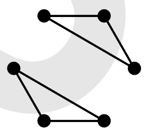


4. Para visualizar as diferentes possibilidades nas relações de amizade entre as 6 pessoas da carruagem, representa-se cada pessoa por um ponto e traça-se um segmento entre 2 pontos para indicar que as pessoas correspondentes são amigas. Há vários casos a considerar.

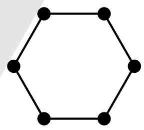
   - <u>Caso 1</u>: todos têm 0 amigos na carruagem. Na nossa representação, isso significa que não há nenhuma ligação entre os 6 pontos. Só há uma forma de isso acontecer.
   - <u>Caso 2</u>: todos têm 1 amigo na carruagem, o que corresponde a juntar as 6 pessoas aos pares, como na seguinte representação.

     O Amílcar pode ter um de 5 amigos possíveis. De entre os quatro restantes passageiros, o primeiro por ordem alfabética pode ter um de 3 amigos possíveis, e o par restante fica determinado. Neste caso, há assim 5×3 possibilidades.
   - <u>Caso 3</u>: todos têm 2 amigos na carruagem. O Amílcar pode ter qualquer um de 10 pares de amigos (BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF e EF, onde cada letra representa a inicial de cada passageiro). Se os amigos do Amílcar forem amigos entre si, então as amizades ficam determinadas e a configuração é a seguinte:

     Se eles não são amigos entre si, então a única configuração possível é a seguinte:

     Neste caso, o primeiro amigo do Amílcar por ordem alfabética pode escoler entre três amigos e o outro pode escolher entre dois amigos. Assim, nesta configuração, há $10 \times 3 \times 2 = 60$ possibilidades. Portanto, neste caso, há $10 + 60 = 70$ possibilidades.
   - <u>Caso 4</u>: todos têm 3 amigos na carruagem. Este caso é similar ao caso em que todos têm 2 amigos, pois ter 3 amigos corresponde a ter 2 "não-amigos", ou seja, também há 70 possibilidades neste caso.
   - <u>Caso 5</u>: todos têm 4 amigos na carruagem. Esse caso corresponde a todos terem 1 "não-amigo", o que dá mais 15 possibilidades.
   - <u>Caso 6</u>: todos têm 5 amigos na carruagem, e só há 1 forma de isso acontecer.

   Portanto, no total há $1 + 15 + 70 + 70 + 15 + 1 = 172$ formas de essas 6 pessoas terem todas o mesmo número de amigos na carruagem.