OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

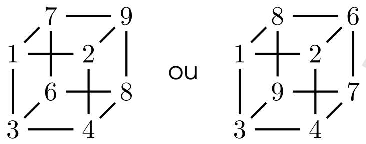
http://www.spm.pt/olimpiadas

XXX OPM - 2ª Eliminatória - 11.01.2012 - Categoria B - 10º/12º anos

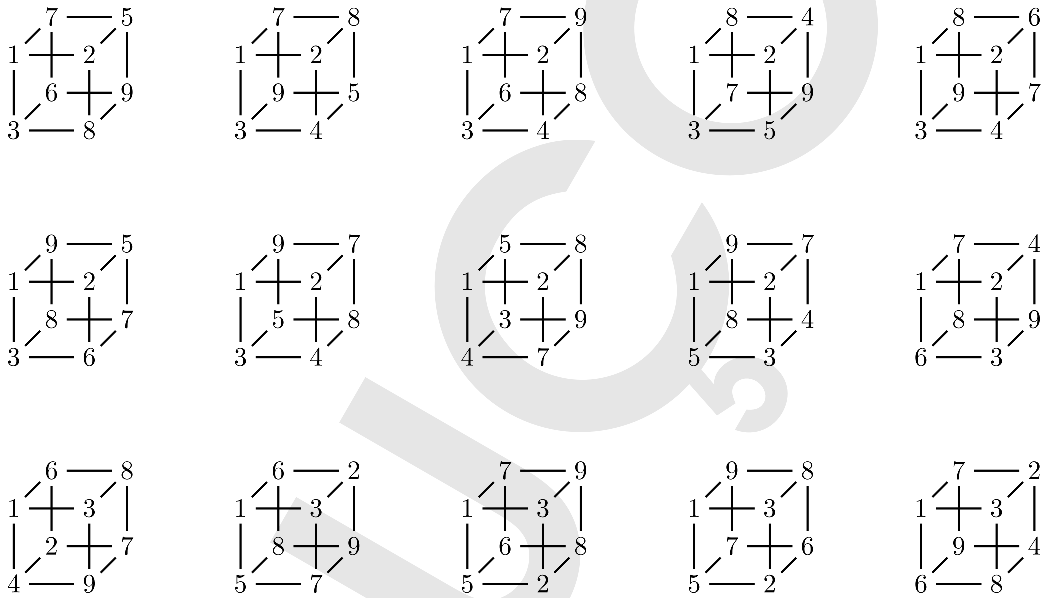
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Uma estratégia para encontrar uma numeração dos vértices do cubo é colocar os números de 1 a 4 numa face, para obter as somas menores, e colocar os números 6 a 9 na face oposta, para obter as somas maiores.



No entanto, há mais soluções para o problema. Em seguida, apresenta-se a lista completa de soluções (ignorando rotações e simetrias):



2. Considere-se um número N de quatro algarismos a, b, c e d, onde os primeiros algarismos podem ser zero (por exemplo, considera-se que o número 6 está escrito na forma 0006). Então a energia de N é

$$a+b+c+d+ab+ac+ad+bc+bd+cd+abc+abd+acd+bcd+abcd = (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)-1.$$

Logo N tem energia 17 se e só se $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)-1 = 17$, ou seja, $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 18$. Como os fatores $a+1, b+1, c+1$ e $d+1$ estão entre 1 e 10, então são os números $1, 1, 2$ e 9, ou os números $1, 1, 3$ e 6 ou os números $1, 2, 3$ e 3 (não necessariamente por esta ordem).

Como N é menor do que 2012, aos fatores $1, 1, 2$ e 9 correspondem as soluções $0018, 0081, 0108, 0180, 0801, 0810, 1008, 1080$ e 1800.

Como N é menor do que 2012, aos fatores $1, 1, 3$ e 6 correspondem as soluções $0025, 0052, 0205, 0250, 0502, 0520$ e 2005.

Como N é menor do que 2012, aos fatores $1, 2, 3$ e 3 correspondem as soluções $0122, 0212, 0221, 1022, 1202$ e 1220.

Portanto há 22 números menores do que 2012 com energia 17.

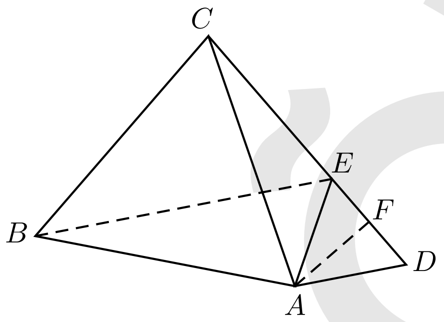
SOLUÇÕES

3. Resolução 1:

Seja F o pé da perpendicular a CD que passa por A. Então $[AFE]$ e $[AFC]$ são triângulos retângulos, logo, pelo Teorema de Pitágoras tem-se

$$\overline{CF}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AF}^2 = \overline{AC}^2 - (\overline{AE}^2 - \overline{EF}^2) = 7^2 - 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}.$$

Portanto $\overline{CF} = \dfrac{13}{2}$, pelo que $\overline{CE} = \overline{CF} - \overline{EF} = \dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2} = 5$.



Como $B\widehat{A}E = 60° + C\widehat{A}E = C\widehat{A}D$, $\overline{BA} = \overline{CA}$ e $\overline{AE} = \overline{AD}$, então os triângulos $[BAE]$ e $[CAD]$ são congruentes. Logo $\overline{BE} = \overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED} = 5 + 3 = 8$.

Resolução 2:

Como $A\widehat{E}C = 180° - A\widehat{E}D = 180° - A\widehat{B}C$, então $[BAEC]$ é um quadrilátero cíclico. Pelo Teorema de Ptolomeu, tem-se $\overline{AC} \times \overline{BE} = \overline{AB} \times \overline{CE} + \overline{AE} \times \overline{BC}$, ou seja, $7 \times \overline{BE} = 7 \times 5 + 3 \times 7 = 56$.

Logo $\overline{BE} = 8$.

Resolução 3:

Como $[BAEC]$ é um quadrilátero cíclico, então $B\widehat{E}A = B\widehat{C}A = 60°$. Pelo Teorema dos Cossenos aplicado ao triângulo $[BEA]$, tem-se $\overline{AB}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EA}^2 - 2 \times \overline{BE} \times \overline{EA} \times \cos(B\widehat{E}A)$, ou seja,

$$7^2 = \overline{BE}^2 + 3^2 - 3 \times \overline{BE}.$$

Usando a fórmula resolvente, obtém-se $\overline{BE} = 8$.

4. Para cada $k \in \{0, \dots, 7\}$, considere-se o conjunto $A_k = \{2^k, \dots, 2^{k+1} - 1\}$ com 2^k elementos:

$$A_0 = \{1\}, \quad A_1 = \{2, 3\}, \quad A_2 = \{4, 5, 6, 7\}, \quad \dots \quad , \quad A_7 = \{128, 129, \dots, 255\}.$$

Como nenhum elemento de $A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$ é o dobro de outro seu elemento, e $A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$ tem $2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 = 170$ elementos, então podem ser retiradas pelo menos 170 bolas com as propriedades requeridas.

Seja X um subconjunto de $\{1, 2, \dots, 255\}$ tal que nenhum elemento de X é o dobro de outro elemento de X. Para cada número n de A_6, apenas um dos números $n, 2n$ pode estar em X. Como em A_7 existem 64 elementos que não são o dobro de um elemento de A_6, então X tem no máximo $64 + 64 = 128$ elementos de A_6 e A_7.

Do mesmo modo, X tem no máximo $16 + 16 = 32$ elementos de A_4 e A_5, tem no máximo $4 + 4 = 8$ elementos de A_2 e A_3 e tem no máximo $1 + 1 = 2$ elementos de A_0 e A_1. Portanto X tem no máximo $128 + 32 + 8 + 2 = 170$ elementos.

Assim, o número máximo de bolas que podem ser retiradas é 170.

SOLUÇÕES