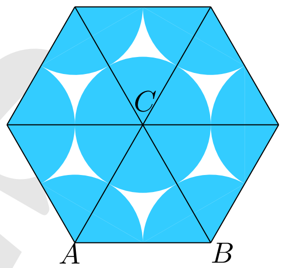
XXVIII OPM - Final - 1º dia - 26.03.2010 - Categoria A - 8º/9º

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2,3: 7 pontos cada

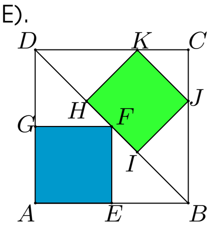
Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) A área do canteiro que não é regada é a área que na figura aparece a branco. A área total do hexágono é igual a seis vezes a área do triângulo equilátero $[ABC]$. Como $\overline{AB} = 2$, a área do triângulo $[ABC]$ é $\sqrt{3}$ m^2 e a área do hexágono é $6\sqrt{3}$ m^2. Os aspersores regam no centro um círculo com 1 metro de raio e, em cada vértice, um sector circular com 1 metro de raio e 120 graus de amplitude. A área regada será igual à área de três círculos com 1 metro de raio, isto é, 3π m^2. Portanto, a área do canteiro que não é regada pelos aspersores é $6\sqrt{3} - 3\pi$ m^2. Opção correcta: C)

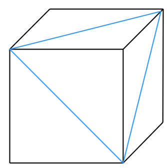


   (b) A Clara pagou um número inteiro de euros logo o número de crocus que comprou é múltiplo de 4. Seja c o número de crocus, j o número de jarros e l o número de lírios que a Clara comprou. Tem-se $\begin{cases} l + j + c = 40 \\ 5l + j + \frac{c}{4} = 40 \end{cases}$. Subtraindo à primeira equação a segunda, obtém-se $4l = \frac{3c}{4}$, ou seja, $l = \frac{3c}{16}$. Como l é um número inteiro, $3c$ é múltiplo de 16, mas sendo 16 primo com 3, conclui-se que c é múltiplo de 16. Uma vez que $c < 40$ tem-se $c = 16$ ou $c = 32$. Se $c = 16$, tem-se $l = \frac{3\times 16}{16} = 3$ e $j = 40-16-3 = 21$. Se $c = 32$, tem-se $l = \frac{3\times 32}{16} = 6$ e $j = 40 - 32 - 6 = 2$. No entanto, neste último caso, o número de lírios é superior ao número de jarros. Portanto, a Clara comprou 21 jarros. Opção correcta: E).

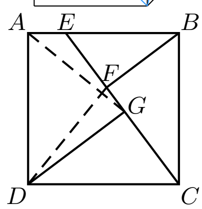
   (c) Os triângulos rectângulos $[DGF]$ e $[FEB]$ são isósceles e congruentes, logo $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. De modo análogo, os triângulos rectângulos $[KHD]$ e $[JIB]$ também são isósceles e congruentes, logo $\overline{HI} = \frac{1}{3}\overline{DB} = \frac{\sqrt{2}}{3}\overline{AB}$. Assim, a razão entre as áreas do quadrado com jarros e do quadrado com lírios é $\frac{\frac{2}{9}\overline{AB}^2}{\frac{1}{4}\overline{AB}^2} = \frac{8}{9}$. Opção correcta: C).



   (d) Os lados dos triângulos equiláteros com vértices nos vértices de um cubo são diagonais das faces do cubo, como se apresenta na figura. Cada diagonal de uma face do cubo pertence a dois triângulos equiláteros. Como há 12 diagonais, haverá 24 triângulos equiláteros. Como cada lado do triângulo foi contado três vezes, há 8 triângulos equiláteros distintos nas condições pretendidas. Opção correcta: B).



2. Os triângulos $[BCF]$ e $[CDG]$ são congruentes uma vez que têm os três ângulos internos iguais e as hipotenusas são dois dos lados do quadrado $[ABCD]$ que, por isso, têm o mesmo comprimento. Em particular tem-se $\overline{FC} = \overline{DG}$. Observe-se também que $A\hat{D}G = F\hat{C}D$ e $\overline{AD} = \overline{DC}$ donde se conclui que $[AGD]$ e $[DFC]$ são triângulos congruentes e, portanto, $\overline{DF} = \overline{AG} = 1$.



3. Sejam n o número de velas e x o número de horas que cada uma das velas dura. O número total de horas que as velas duram é $S = nx$. Ora, como no primeiro dia se gasta 1 destas horas, no segundo 2 e assim sucessivamente até ao dia n, temos que $S = 1 + 2 + \ldots + n$. Logo $S = \frac{S+S}{2} = \frac{(1+2+\cdots+n)+(n+(n-1)+\cdots+1)}{2} = \frac{(1+n)+(2+(n-1))+\cdots+(n+1))}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Temos então $x = \frac{S}{n} = \frac{n+1}{2}$. Como cada vela foi acesa um número inteiro de vezes durante uma hora de cada vez, x tem de ser um número inteiro, logo n não pode ser par.

   Vejamos agora que para qualquer n ímpar, há um modo de acender as velas tal que ao fim dos n dias todas arderam o mesmo número de horas. Para $k = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, no dia k acendemos um qualquer conjunto de k velas e no dia $n-k$ acendemos as $n-k$ velas que não foram acesas no dia k. No dia n acendemos todas as velas. Assim,cada uma das velas foi acesa exactamente uma vez, ou no dia k, ou no dia $n-k$ e no último dia foram todas acesas. Concluímos que assim todas as velas foram acesas durante o mesmo tempo.