OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXVIII OPM - 2ª Eliminatória - 13.01.2010 - Categoria A - 8º/9º

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Uma vez que a soma dos números de um par está entre 3 e 35, esta soma terá de ser $4, 9, 16$ ou 25.

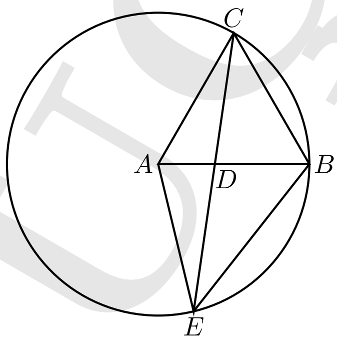
   Assim os pares $\{7,18\}$,$\{8,17\}$ e $\{9,16\}$ são os únicos possíveis contendo os números $16, 17$ e 18. O número 2, uma vez que 7 já aparece noutro par, só poderá estar no par $\{2,14\}$. Tendo já escolhido o 14, o número 11 terá necessariamente que aparecer no par $\{5,11\}$. Portanto o número 4 terá de aparecer no par $\{4,12\}$ e o número 13 no par $\{3,13\}$. Assim o número 1 aparecerá no par $\{1,15\}$ e o último par será $\{6,10\}$.

   Portanto, o Miguel só poderá agrupar os números de uma única forma: $\{1,15\}$, $\{2,14\}$, $\{3,13\}$, $\{4,12\}$, $\{5,11\}$, $\{6,10\}$, $\{7,18\}$, $\{8,17\}$ e $\{9,16\}$.

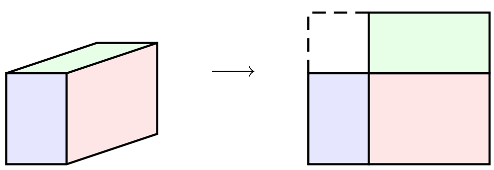
2. **Resolução 1:** Tem-se $D\hat{E}B = 180° - C\hat{B}E - E\hat{C}B$. Como o triângulo $[ABC]$ é equilátero, então $C\hat{B}E = C\hat{B}A + A\hat{B}E = 60° + A\hat{B}E$. Por outro lado, $E\hat{C}B = A\hat{C}B - A\hat{C}D = 60° - A\hat{C}D$. Logo $D\hat{E}B = 180° - (60° + A\hat{B}E) - (60° - A\hat{C}D) = 60° + A\hat{C}D - A\hat{B}E$.

   Como os triângulos $[ABE]$ e $[ACE]$ são isósceles, com $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{AC}$, então $A\hat{B}E = A\hat{E}B$ e $A\hat{C}D = A\hat{E}D$. Assim, $D\hat{E}B = 60° + A\hat{E}D - A\hat{E}B = 60° - D\hat{E}B$. Portanto $2D\hat{E}B = 60°$, ou seja, $D\hat{E}B = 30°$.

   Resolução 2: Considere-se a circunferência de centro A e raio $[AC]$. Como o triângulo $[ABC]$ é equilátero e $\overline{AE} = \overline{AC}$, os segmentos $[AB]$ e $[AE]$ também são raios da circunferência. Pelo teorema do arco capaz, tem-se $C\hat{E}B = \frac{1}{2}C\hat{A}B$. Sendo $[ABC]$ equilátero, o ângulo $\measuredangle CAB$ mede $60°$. Logo $\measuredangle DEB$ mede $30°$.



3. A aresta menor do paralelepípedo tem de comprimento 1 ou 2 centímetros, pois se cada aresta tivesse pelo menos 3 cm, então cada face teria uma área de pelo menos 9 cm^2 e o paralelepípedo teria uma área total de pelo menos $6 \times 9 = 54$ cm^2. Como as faces opostas de um paralelepípedo têm a mesma área, então a figura formada pelas três faces que rodeiam um vértice tem área total $52/2 = 26$ cm^2. Na figura seguinte está representada a planificação desta figura, obtida através do corte da aresta menor.



   O quadrado indicado a tracejado tem de área $1^2 = 1$ ou $2^2 = 4$ cm^2.

No primeiro caso, a área do rectângulo formado pelas três faces da planificação e pelo quadrado é $26+1=27$ cm^2. Como os lados deste rectângulo medem um número inteiro de centímetros, maior ou igual a 2, e o seu produto é 27, então os lados do rectângulo medem 3 e 9 centímetros. Logo, neste caso as arestas do paralelepípedo medem $1, 3-1=2$ e $9-1=8$ cm.

No segundo caso, a área do rectângulo é $26+4=30$ cm^2. Como os lados deste rectângulo medem um número inteiro de centímetros, maior ou igual a 4, e o seu produto é 30, então os lados do rectângulo medem 5 e 6 centímetros. Logo, neste caso as arestas do paralelepípedo medem $2, 5-2=3$ e $6-2=4$ cm.

4. Só é possível obter o mesmo produto com duas escolhas distintas de 5 números do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ se o produto dos 2 números não escolhidos em cada caso for igual. Isso só acontece quando são escolhidos os números $1,4,5,6,7$ e $2,3,4,5,7$ pois $2\times 3=1\times 6$ ou quando são escolhidos os números $1,2,5,6,7$ e $1,3,4,5,7$ pois $3\times 4=2\times 6$.

   Mas tanto $1+4+5+6+7$ como $2+3+4+5+7$ são ímpares, e portanto, se o João tivesse dito à Maria o número 840 ($840=1\times 4\times 5\times 6\times 7=2\times 3\times 4\times 5\times 7$), a Maria, com essa informação, poderia dizer que a soma dos números escolhidos pelo João era ímpar.

   No outro caso, as somas têm paridades diferentes: $1+2+5+6+7$ é ímpar e $1+3+4+5+7$ é par. Assim, quando o João diz à Maria o número 420 ($420=1\times 2\times 5\times 6\times 7=1\times 3\times 4\times 5\times 7$), a Maria não pode dizer se a soma dos números escolhidos pelo João é par ou ímpar.

   O produto calculado pelo João foi 420.