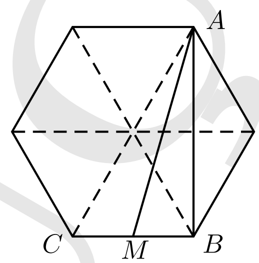
XXVIII OPM - 1ª Eliminatória - 11.11.2009 - Categoria B - 10°/12°

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Como a nota Ré apenas é tocada pelo Raúl, então a sequência Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó tem que ser iniciada pelo Gonçalo. O Dó do Gonçalo é a nona nota a ser tocada e a partir daí, é tocada de 10 em 10 notas, pois a sequência do Gonçalo é composta por 5 notas. Logo, este Dó é tocado ao fim de $9, 19, 29, 39, 49, 59, \ldots$ notas. O Ré é a quarta nota a ser tocada e a partir daí é tocada de 14 em 14 notas, pois a sequência do Raúl é composta por 7 notas. Logo, o Ré é tocado ao fim de $4, 18, 32, 46, 60, \ldots$ notas. Deste modo, o Dó é tocado antes do Ré ao fim de 59 notas, e, de facto, as notas seguintes completam a sequência Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó pretendida.

2. A Duquesa começa o seu passeio no vértice A do hexágono representado na figura, e termina-o no ponto M. O ponto M é o ponto médio de dois vértices B e C, tendo a Duquesa no seu passeio passado por B. Como o hexágono é regular, pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros, donde se conclui que $\overline{AC} = 2 \times 20 = 40$ km. Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $[ABC]$ obtém-se $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 40^2 - 20^2 = 1200$. Aplicando agora o teorema de Pitágoras ao triângulo $[ABM]$ obtém-se $\overline{AM} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{MB}^2} = \sqrt{1200 + 100} = 10\sqrt{13}$ km.



3. Seja m o segundo divisor escrito pelo Joaquim. Então o penúltimo divisor de n é n/m, pelo que $n = 15m \times m = 3 \times 5 \times m^2$. Assim, o segundo divisor de n é necessariamente igual a 2 ou a 3. Os possíveis valores de n serão, então, $3 \times 5 \times 2^2 = 60$ e $3 \times 5 \times 3^2 = 135$.

4. Sejam $a \leq b \leq 2009$ as medidas dos três lados do triângulo. Podemos formar um triângulo com lados $a, b, 2009$ se $a + b > 2009$, ou seja, $a \geq 2010 - b$. Assim, para cada valor de b, o lado a pode variar entre $2010 - b$ e b, ou seja, existem $2b - 2009$ possibilidades para o valor de a. Como o lado b pode variar entre 1005 e 2009 então o número total de possibilidades é

$$\begin{aligned}(2 \times 1005 - 2009) + (2 \times 1006 - 2009) + (2 \times 1007 - 2009) + \cdots + (2 \times 2009 - 2009) &= \\ &= 1 + 3 + 5 + \cdots + 2007 + 2009 = \\ &= (1 + 2009) + (3 + 2007) + \cdots + (1003 + 1007) + 1005 = \\ &= 2010 + 2010 + \cdots + 2010 + 1005 = \\ &= 512 \times 2010 + 1005 = \\ &= 1010025\end{aligned}$$