OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXVII OPM - Final - 2º dia - 28.03.2009 - Categoria B - 10º/12º

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Seja $P(n)$ o produto dos dígitos não nulos de n, e seja $P(0) = 1$. Estamos interessados em calcular $P(1) + P(2) + \cdots + P(10^{2009})$. Facilmente verificamos que,

$$(0+1+\cdots+9)^{2009} = 0\times 0\cdots\times 0\times 0 + 0\times 0\cdots\times 1+\cdots+9\times 9\cdots\times 9\times 9$$

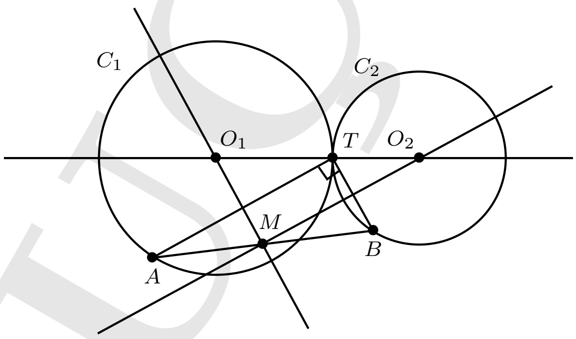
dá a soma do produto dos algarismos dos números de 0 a $10^{2009}-1$, escritos com 2009 algarismos. Para termos o produto dos algarismos não nulos basta trocar os zeros por uns, ou seja,

$$P(0)+P(1)+\cdots+P(10^{2009}-1) = (1+1+2+\cdots+9)^{2009} = 46^{2009}$$

Logo,

$$P(1)+P(2)+\cdots+P(10^{2009}) = 46^{2009} - P(0) + P(10^{2009}) = 46^{2009} - 1 + 1 = 46^{2009}.$$

5. Seja M o ponto médio de $[AB]$. De $A\hat{T}B = 90^{\text{o}}$ resulta que T pertence à circunferência de diâmetro $[AB]$. Uma vez que M é o centro desta circunferência, $\overline{TM} = \overline{AM} = \overline{BM}$, concluindo-se que O_1M é a mediatriz de $[AT]$ e O_2M é a mediatriz de $[BT]$.

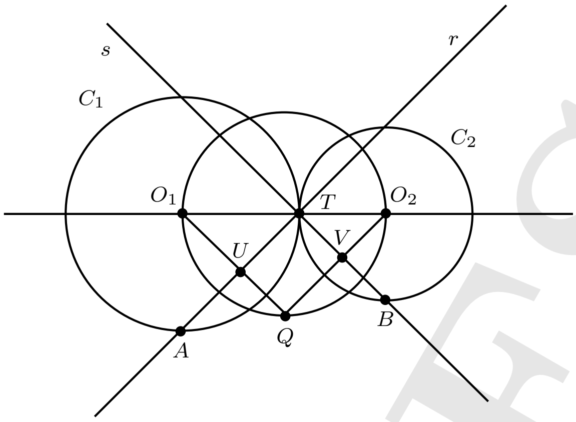


Então $O_1M \perp AT$ e $O_2M \perp BT$, obtendo-se $O_1\hat{M}O_2 = 90^{\text{o}}$. Assim, M pertence à circunferência de diâmetro $[O_1O_2]$. Observe-se que $M \neq O_1$ e $M \neq O_2$ porque M é o ponto médio de $[AB]$ e A e B são distintos de T.

Prove-se agora que qualquer ponto, Q, da circunferência de diâmetro $[O_1O_2]$, distinto de O_1 e O_2, é o ponto médio de um segmento $[AB]$ em que A é um ponto de C_1, B é um ponto de C_2, ambos distintos de T, e $B\hat{T}A = 90^{\text{o}}$.

Uma vez que $Q \neq O_1$ e $Q \neq O_2$, QO_1 e QO_2 são rectas. Por T marque-se uma recta paralela a QO_2, r, e uma recta paralela a QO_1, s. Se r fosse tangente a C_1 em T, QO_2 seria perpendicular a O_1O_2, o que é impossível pois Q pertence à circunferência de diâmtero O_1O_2. Então r intersecta C_1 num ponto distinto de T, A. Analogamente a recta s intersecta C_2 num ponto distinto de T, B. Sendo Q um ponto da circunferência de diâmetro $[O_1O_2]$, $O_1\hat{Q}O_2 = 90^{\text{o}}$.

Então $r \perp s$ e $A\hat{T}B = 90^o$. Tem-se ainda que $QO_1 \perp r$. Então, porque $\overline{O_1T} = \overline{O_1A}$, conclui-se que QO_1 é a mediatriz de $[AT]$. Seja U o ponto de intersecção de $[QO_1]$ e $[AT]$. Analogamente QO_2 é a mediatriz de $[BT]$. Designe-se por V o ponto de intersecção de $[QO_2]$ e $[BT]$.



Uma vez que $\overline{AU} = \overline{UT} = \overline{QV}$, $\overline{BV} = \overline{VT} = \overline{QU}$ e $A\hat{U}Q = Q\hat{V}B$, os triângulos $[AUQ]$ e $[QVB]$ são congruentes. Então $U\hat{A}Q = V\hat{Q}B$ e $\overline{AQ} = \overline{QB}$. Assim Q é o ponto médio de $[AB]$.

O lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos $[AB]$ com $A \in C_1 \setminus \{T\}$, $B \in C_2 \setminus \{T\}$ e $B\hat{T}A = 90^o$ é a circunferência de diâmetro $[O_1O_2]$, sem os pontos O_1 e O_2.

6. Represente-se por X_nY uma sequência que se inicia (em qualquer dos sentidos) na peça X, termina na peça Y e tem n casas entre X e Y.

   O primeiro jogador tem uma estratégia vencedora, descrita a seguir. O primeiro jogador começa por colocar uma armadilha numa casa qualquer, criando uma sequência $A_{2008}A$. Se o segundo jogador colocar uma pedra ou um explorador de modo a criar uma sequência A_0E, A_0P ou A_1E, o primeiro jogador pode formar imediatamente um tesouro e ganha; se o segundo jogador colocar uma pedra ou explorador de modo a criar uma sequência A_nE ou A_nP, que não seja um dos casos anteriores, o primeiro jogador coloca uma armadilha de modo a criar uma sequência $A_nE_nA_{2k}A$ (com $n \geq 2, k \geq 0$) ou $A_nP_nA_{2k}A$ (com $n \geq 1, k \geq 0$); se o segundo jogador colocar uma armadilha de modo a criar uma sequência $A_mA_{2007-m}A$, o primeiro jogador coloca uma pedra a meio da sequência que tem um número ímpar de casas vazias de modo a criar uma sequência $A_nP_nA_{2k}A$ (com $n, k \geq 0$).

   A partir deste momento, por cada jogada que o segundo jogador faça na sequência A_nE_nA (ou A_nP_nA), o primeiro jogador joga na mesma sequência, e, por cada jogada que o segundo jogador faça na sequência $A_{2k}A$, o primeiro jogador joga na mesma sequência. Estas jogadas são realizadas do seguinte modo:

   - Jogada na sequência A_nE_nA (com $n \geq 2$) ou A_nP_nA (com $n \geq 1$): após a jogada do segundo jogador, se o primeiro jogador puder formar um tesouro, forma-o; caso contrário, joga de forma simétrica à jogada do segundo jogador, relativamente à casa central da sequência. Deste modo, o primeiro jogador nunca dá oportunidade ao segundo jogador de formar um tesouro e, nalgum momento, o segundo jogador tem que preencher uma casa adjacente à casa central, o que permite que o primeiro jogador forme um tesouro.
   - Jogada na sequência $A_{2k}A$: após a jogada do segundo jogador, o primeiro jogador usa a mesma estratégia que usou para a sequência $A_{2008}A$, formando um tesouro ou criando uma sequência $A_nE_nA_{2k'}A$ (com $n \geq 2, k' \geq 0$) ou $A_nP_nA_{2k'}A$ (com $n, k' \geq 0$).

Com esta estratégia, o primeiro jogador não perde. De facto, esta estratégia garante a vitória, excepto se as sequências A_nP_nA formadas tiverem sempre $n = 0$, caso em que o primeiro jogador apenas garante o empate. Para garantir a vitória neste caso, o primeiro jogador tem que modificar ligeiramente a sua estratégia.

Se a partir de cada sequência $A_{2k}A$ se forma sempre uma sequência $A_0P_0A_{2k-2}A$, então nalgum momento forma-se uma sequência A_6A e o segundo jogador coloca de seguida uma armadilha, formando uma sequência A_1A_4A. Neste momento, o primeiro jogador, em vez de colocar uma pedra de modo a criar a sequência $A_0P_0A_4A$, coloca uma pedra, criando a sequência $A_1A_1P_2A$. A partir daqui, ou o segundo jogador coloca uma peça que permite ao primeiro jogador formar um tesouro, ou cria uma das sequências $A_0X_0A_1P_2A$ ou $A_1A_1P_1A_0A$; nestes dois últimos casos, o primeiro jogador coloca uma armadilha criando a sequência $A_0X_0A_1P_1A_0A$, e em seguida o segundo jogador tem que colocar uma peça adjacente à pedra, o que permite ao primeiro jogador formar um tesouro.