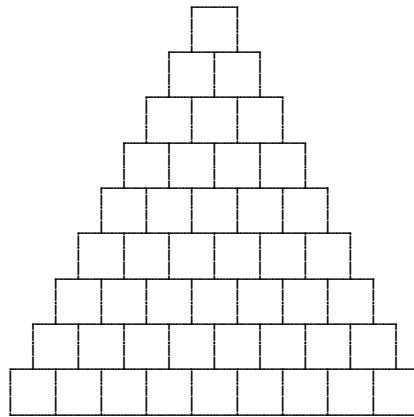


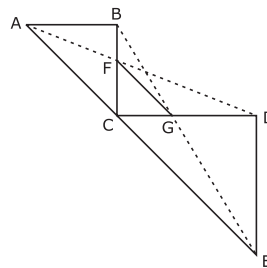
Duração: 2 horas  
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.  
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Dado um número real  $r$ , representa-se por  $\lfloor r \rfloor$  o maior inteiro menor ou igual a  $r$ . Por exemplo,  $\lfloor 6 \rfloor = 6$ ,  $\lfloor \pi \rfloor = 3$  e  $\lfloor -1.5 \rfloor = -2$ . Indica o conjunto dos pontos  $(x, y)$  do plano para os quais  $\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor y \rfloor^2 = 4$ .
2. Os números de 1 a 9 são distribuídos pelos nove quadrados da base da torre. Os restantes quadrados são preenchidos colocando em cada um o produto dos dois números dos quadrados imediatamente abaixo.  
De quantas formas diferentes podes distribuir os nove números pelos quadrados da base, de modo a garantir que o número do quadrado do topo da torre é o menor possível?



3. Considera os triângulos isósceles  $[ABC]$  e  $[CDE]$ , rectângulos em  $B$  e  $D$ , respectivamente.  $\angle BCD$  é recto,  $[AD]$  intersecta  $[BC]$  no ponto  $F$  e  $[BE]$  intersecta  $[CD]$  no ponto  $G$ . Determina a amplitude de  $\angle CFG$ .



4. Um número inteiro positivo diz-se triangular se pode ser escrito na forma  $\frac{n(n+1)}{2}$  para algum inteiro  $n$ . Quantos pares  $(a, b)$  de números triangulares existem tais que  $b - a = 2008$ ?