Olimpíadas Portuguesas de Matemática

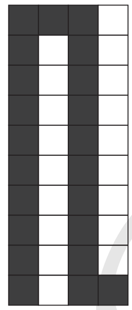
http://www.spm.pt/~opm

XXVI OPM - 1ª Eliminatória - 14.11.2007 - Categoria B - 10º/12º

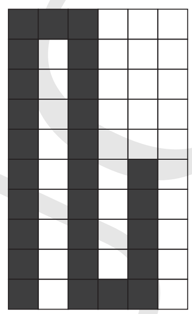
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. A pintura feita pelo João repete o seguinte padrão de quatro em quatro colunas.



Cada padrão é composto por 22 casas pintadas de preto e 18 casas não pintadas. Uma vez que $2007 = 22 \times 91 + 5$, o João pintou 91 padrões e mais 5 casas, pelo que a pintura termina em



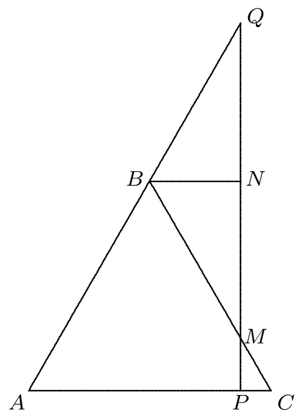
Note-se que, em qualquer padrão, as 18 casas não pintadas têm, pelo menos, dois lados em comum com casas pretas, excepto no último. No último padrão apenas $9 + 4 = 13$ casas estão nestas condições. Assim, no total, há $18 \times 90 + 13 = 1633$ casas que têm, pelo menos, dois lados em comum com casas pretas.

2. Seja t o comprimento da pista. Se, até ao momento em que se cruzou com o João, a Eloísa tinha percorrido x metros, então o João tinha percorrido $\frac{x}{2}$ metros, pois ele corre a metade da velocidade da Eloísa. Como correram em sentidos opostos, a soma da distâncias percorridas pela Eloísa e pelo João até esse momento é igual ao comprimento da pista, ou seja,
$$t = x + \frac{x}{2} = \frac{3}{2}x.$$

Quando se cruzou com o Vasco, a Eloísa tinha percorrido $x + 20$ metros e o Vasco $\frac{x+20}{3}$ metros, pois ele corre a um terço da velocidade da Eloísa. Da mesma forma, a soma das distâncias por eles percorridas até esse momento é igual ao comprimento da pista, ou seja,
$$t = x + 20 + \frac{x+20}{3} = \frac{4}{3}(x + 20).$$

Assim, $\frac{3}{2}x = t = \frac{4}{3}(x + 20)$, ou seja, $x = 160$ e $t = 240$. Portanto, o comprimento da pista é 240 metros.

3. Considera a figura seguinte



Sendo $[ABC]$ um triângulo equilátero e $[CPM]$ um triângulo rectângulo, tem-se $A\hat{C}B = 60^o$ e $C\hat{M}P = 30^o$. Note-se que $\angle CMP$ e $\angle QMB$ são ângulos verticalmente opostos e, por isso, $Q\hat{M}B = 30^o$. Da mesma forma, uma vez que $[QPA]$ é um triângulo rectângulo, tem-se que $A\hat{Q}P = 30^o$ e, assim, $[BQM]$ é um triângulo isósceles. Como N é o ponto médio de $[MQ]$, conclui-se que $[BN]$ é a altura do triângulo isósceles $[BQM]$ e, por isso, $[BNM]$ é um triângulo rectângulo. Uma vez que $N\hat{M}B = 30^o$ tem-se

$$\overline{BM} = \frac{\overline{BN}}{\text{sen } 30^o} = 2 \times 10 = 20.$$

Da mesma forma, tem-se que $\overline{MC} = 2 \times \overline{PC} = 2 \times 1 = 2$. Portanto, o lado do triângulo $[ABC]$ mede $20 + 2 = 22$.

4. O ano 2007, não sendo bissexto, tem meses com 28, 30 e 31 dias. Pretende-se encontrar uma escolha de sinais $\pm$ tais que $\pm 1 \pm 2 \pm 3 + \cdots \pm (n-1) \pm n = 0$, para $n = 29$, 30 ou 31.

Solução 1: Note-se que a paridade do número $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$ é igual à paridade do número $\pm 1 \pm 2 \pm 3 + \cdots \pm (n-1) \pm n$. Uma vez que $1 + 2 + 3 + \cdots + 29 + 30$ é um número ímpar, porque é uma soma com 15 parcelas ímpares, então, para $n = 30$, o número $\pm 1 \pm 2 \pm 3 + \cdots \pm (n-1) \pm n$ também é ímpar e, por isso, não é zero qualquer que seja a escolha de sinais.

Para $n = 28$ é possível que a soma seja nula, basta colocar sinais $+$ e $-$ alternadamente a partir do dia 7

$$1 + 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + 11 + \cdots + 27 - 28 = 0.$$

Para $n = 31$ é possível que a soma seja nula, basta colocar sinais $+$ e $-$ alternadamente a partir do dia 10

$$1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 + 10 - 11 + 12 - 13 + \cdots - 29 + 30 - 31 = 0.$$

Portanto, o Jeremias apenas consegue voltar ao sítio de onde partiu em Fevereiro e nos meses com 31 dias.

Solução 2: No final de um mês com n dias o Jeremias percorreu

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ metros.}$$

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_s$ os dias em que subiu e $b_1, b_2, \ldots, b_t$ os dias em que desceu. Considere-se $A = a_1 + a_2 + \cdots + a_s$ e $B = b_1 + b_2 + \cdots + b_t$ e note-se que

$$A + B = \frac{n(n+1)}{2}$$

.

Para que, no final do mês, o Jeremias volte ao sítio de onde partiu, é necessário que $A - B = 0$. Neste caso, como $A + B = \dfrac{n(n+1)}{2}$, tem-se $A = \dfrac{n(n+1)}{4}$ e, por isso, é necessário que 4 divida n ou $n+1$. Para $n = 30$ isto não acontece. Para $n = 28$ e $n = 31$ obtém-se $A - B = 0$, por exemplo, das seguintes maneiras:

$$(1 - 2 - 3 + 4) + (5 - 6 - 7 + 8) + \cdots + (25 - 26 - 27 + 28) = 0,$$

$$(1 + 2 - 3) + (4 - 5 - 6 + 7) + \cdots + (28 - 29 - 30 + 31) = 0.$$

Portanto, o Jeremias apenas consegue voltar ao sítio de onde partiu em Fevereiro e nos meses com 31 dias.