Sugestões para a resolução dos problemas

1. **Solução 1:** Observe-se que ao mudar o sinal dos números de todos os vértices de uma face, o sinal do número dessa face não se altera. Assim, ao mudar o sinal dos números de todos os vértices do cubo, o número de faces com o número 1 mantém-se.

   - Um cubo com o número 1 (ou o número -1) em todos os vértices tem o número 1 em todas as faces; logo, a soma dos 14 números é 14 (ou $-8+6=-2$).
   - Um cubo com o número 1 (ou o número -1) em 7 vértices tem 3 faces com o número 1 e 3 faces com o número -1; logo, a soma dos 14 números é $7-1=6$ (ou $-7+1=-6$).
   - Um cubo com o número 1 (ou o número -1) em 6 vértices tem 4 faces, 2 faces ou nenhuma com o número 1; logo, os valores possíveis para a soma dos 14 números são $6-2+4-2=6, 6-2+2-4=2$ e $6-2-6=-2$ (ou $2-6+4-2=-2, 2-6+2-4=-6$ e $2-6-6=-10$).
   - Um cubo com o número 1 (ou o número -1) em 5 vértices tem 3 faces com o número 1; logo, a soma dos 14 números é $5-3=2$ (ou $3-5=-2$).
   - Um cubo com o número 1 em 4 vértices tem 4 faces com o número 1, todas as faces com o número 1 ou nenhuma; logo, os valores possíveis para a soma dos 14 números são $4-2=2$, 6 e -6.

   Portanto, os valores possíveis para a soma dos 14 números são -10, -6, -2, 2, 6 e 14.

   Solução 2:

   Solução parcial a: Observe-se que entre os 5 números associados a cada face, há um número ímpar de números iguais a 1. Considere-se a soma desses 5 números para cada face e calcule-se a soma das 6 somas assim obtidas. Esta soma tem um número par de parcelas iguais a 1 e um número par de parcelas iguais a -1 e, além disso, pode decompor-se na soma dos 14 números do cubo com o dobro da soma dos 8 números dos vértices. Logo, a soma dos 14 números tem um número par de parcelas iguais a 1 e um número par de parcelas iguais a -1.

   Solução parcial b: Seja p o produto dos 8 números dos vértices. Como cada vértice do cubo é vértice de exactamente 3 faces, o produto dos 6 números das faces é p^3 e, consequentemente, o produto dos 14 números é p^4 e é necessariamente igual a 1. Portanto, a soma dos 14 números tem um número par de parcelas iguais a 1 e um número par de parcelas iguais a -1.

   Assim, o número de parcelas iguais a 1 é da forma $2k, k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ e o correspondente número de parcelas iguais a -1 é $14-2k$, pelo que a soma dos 14 números do cubo é $s = 4k - 14$, para $k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$.

   Resta analisar se existem configurações do cubo para cada um dos casos considerados:

   (a) $k=0$ e $s=-14$ (não existe nenhum cubo nas condições indicadas).

   (b) $k=1$ e $s=-10$ (um cubo que tem apenas 2 vértices diagonalmente opostos e em faces distintas com o número 1 está nas condições indicadas).

   (c) $k=2$ e $s=-6$ (um cubo que tem apenas 1 vértice com o número 1 está nas condições indicadas).

   (d) $k=3$ e $s=-2$ (um cubo que tem apenas 2 vértices de uma aresta com o número 1 está nas condições indicadas).

   (e) $k=4$ e $s=2$ (um cubo que tem apenas 3 vértices de uma face e 1 vértice da face oposta com o número 1, de modo que tenha apenas uma face com o número 1 em 3 vértices, está nas condições indicadas).

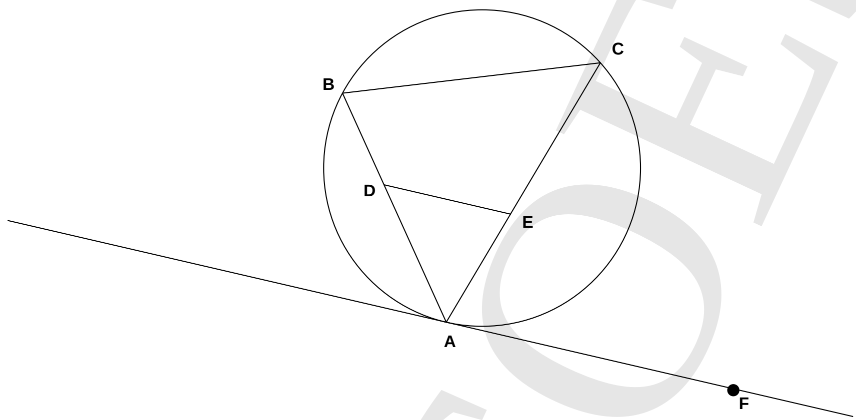
(f) $k=5$ e $s=6$ (um cubo que tem apenas 1 vértice com o número -1 está nas condições indicadas).

(g) $k=6$ e $s=10$ (não existe nenhum cubo nas condições indicadas).

(h) $k=7$ e $s=14$ (um cubo que tem todos os vértices com o número 1 está nas condições indicadas).

Portanto, os valores possíveis para a soma dos 14 números são -10, -6, -2, 2, 6 e 14.

2. Considere-se sobre a recta tangente o ponto F indicado na figura.



Os ângulos $\angle ABC$ e $\angle FAC$ têm a mesma amplitude, pois estão inscritos no mesmo arco. Como $[DE]$ é paralelo a $[AF]$, também $\angle AED$ e $\angle FAC$ têm a mesma amplitude logo, $A\hat{B}C = A\hat{E}D$. Do mesmo modo, tem-se $A\hat{C}B = A\hat{D}E$ e os triângulos $[ABC]$ e $[AED]$ são semelhantes. Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{AB}}{5} = \frac{12}{6} = 2,$$

pelo que $\overline{AB} = 10$ e $\overline{BD} = 10-6 = 4$.

3. Como a centopeia não pode recuar nem passar para triângulos de linhas abaixo, então passa de uma linha à seguinte exactamente uma vez e o caminho fica completamente determinado pelos lados onde são feitas as passagens de linha. Como existem 10 linhas, então existem 9 passagens de linha. Para passar da linha i para a linha $i+1$ a centopeia tem $10-i$ escolhas, com i a variar de 1 a 9. Logo existem $(10-1)\times(10-2)\times\ldots\times 1 = 9!$ caminhos possíveis.

4. Considerem-se três casos: $p<q$, $p>q$ e $p=q$.

Se $p<q$ então $p+p(q+1) = p(q+2)$ é um dos números da lista e não é primo. Assim p não pode ser inferior a q.

Suponha-se que $p>q$. Dividindo p por q obtém-se $p = qk+r$, com k e r números naturais e $1 \le r \le q-1$. Uma vez que $1 \le q-r \le q-1$, o número $p+(q-r)(q+1)$ é um dos números da lista. Mas $p+(q-r)(q+1) = qk+r+(q-r)(q+1) = q(k+q+1-r)$ e $k+q+1-r > 1$, logo $p+(q-r)(q+1)$ não é primo. Assim p não pode ser superior a q. Se $p=q$ os p números da lista são

$$p,\ 2p+1,\ 3p+2, \ldots,\ p^2+p-1\,.$$

Se $p = 2$ a lista é formada pelos números primos 2 e 5.

Se $p = 3$ a lista é formada pelos números primos 3, 7 e 11.

Se $p = 5$ a lista é formada pelos números primos 5, 11, 17, 23 e 29.

Para $p = 7$ o segundo número da lista é 15, que não é primo.

Suponha-se que $p > 7$. Dividindo p por 7 tem-se que $p = 7k + r$, com k e r números naturais verificando $k \geq 1$ e $1 \leq r \leq 6$.

Se $r \neq 6$ há sempre um elemento da lista que não é primo:

$r = 1$	$4p + 3 = 7(4k + 1)$
$r = 2$	$5p + 4 = 7(5k + 2)$
$r = 3$	$2p + 1 = 7(2k + 1)$
$r = 4$	$3p + 2 = 7(3k + 2)$
$r = 5$	$6p + 5 = 7(6k + 5)$

Se $r = 6$ então $p = 7k + 6$ e $p - 1 = 7k + 5$ não é uma potência de 2, porque o resto da divisão de uma potência de 2 por 7 pertence a $\{1, 2, 4\}$. Seja s um divisor de $p - 1$, ímpar e superior a 1. Existe $a \in \mathbb{N}$, par, tal que $p - 1 = as$. Claro que $2 \leq \dfrac{s+1}{2} < p$ e, portanto, $\dfrac{s+1}{2}\,p + \dfrac{s-1}{2}$ é um dos números da lista.

Mas $\dfrac{s+1}{2}\,p + \dfrac{s-1}{2} = s\dfrac{as+a+2}{2}$, e este número não é primo, porque $as + a + 2$ é par e superior a 2.

Assim, há apenas três possibilidades para a escolha de p e q: $p = q = 2$, $p = q = 3$ e $p = q = 5$.