XXV OPM - 2ª Eliminatória - 17.1.2007- Categoria A - 8º/9º

Cada questão vale 10 pontos

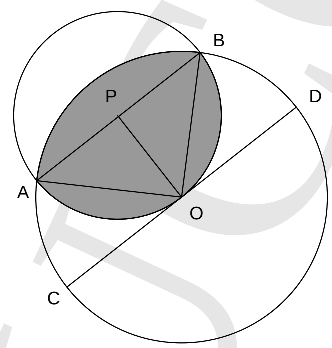
Sugestões para a resolução dos problemas

1. O produto de um número com um algarismo por um número com dois algarismos está entre $1 \times 10 = 10$ e $9 \times 99 = 891$. Os resultados possíveis para o produto que o Gaspar efectuou são $15, 105$ e 150. Factorizando estes números, tem-se

$$15 = 1 \times 15$$
$$105 = 3 \times 5 \times 7 = 3 \times 35 = 5 \times 21 = 7 \times 15$$
$$150 = 2 \times 3 \times 5^2 = 2 \times 75 = 3 \times 50 = 5 \times 30 = 6 \times 25.$$

Uma vez que não existe o botão com o algarismo zero, o Gaspar só pode ter multiplicado 1 por 15, 3 por 35, 5 por 21, 7 por 15, 2 por 75 ou 6 por 25.

2. Seja $[CD]$ o diâmetro da circunferência maior que é paralelo a $[AB]$ e P o centro da circunferência menor.



A circunferência menor é tangente a $[CD]$, logo $[PO]$ e $[PA]$ são perpendiculares. Além disso, este segmentos têm o mesmo comprimento e o Teorema de Pitágoras garante que

$$2 \times \overline{PA}^2 = \overline{OA}^2.$$

Como $\overline{OA} = 10$, tem-se $\overline{PA} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$. Assim, a área do semi-círculo de diâmetro $[AB]$ é $\frac{1}{2} \times \pi \times \overline{PA}^2 = 25\,\pi$. Por outro lado, $A\hat{O}B = A\hat{O}P + P\hat{O}B = 45^o + 45^o = 90^o$ e a área do menor sector circular AB do círculo maior é $\frac{1}{4} \times \pi \times \overline{OA}^2 = 25\pi$.

Finalmente, note-se que

$$\text{área sombreada} = \text{área do semi-círculo } AOB + \text{ área do sector } AB - \text{área do } \triangle[AOB].$$

Uma vez que a área do triângulo $[AOB]$ é $\frac{\overline{AB} \times \overline{PO}}{2} = 50$, conclui-se que a área da região sombreada é $50(\pi - 1)$ cm^2.

3. **Solução 1:** O Afonso tem que ficar com a bicicleta de um dos outros quatro. Suponha-se que o Afonso fica com a bicicleta do Bruno.

   Se o Bruno fica com a bicicleta do Afonso, então o Carlos ou fica com a bicicleta do Daniel ou fica com a bicicleta do Eduardo, ficando estes dois rapazes com as bicicletas restantes. Há apenas duas maneiras de isto acontecer.
   Se o Bruno não fica com a bicicleta do Afonso, então tem que ficar com a bicicleta de um dos outros três rapazes. Suponha-se que o Bruno fica com a bicicleta do Carlos. Na tabela seguinte indicam-se as três maneiras distintas de distribuir as bicicletas neste caso:

Afonso	Bruno	Carlos	Daniel	Eduardo
B	C	A	E	D
B	C	E	A	D
B	C	D	E	A

   Como o Bruno pode ficar com a bicicleta ou do Carlos ou do Daniel ou do Eduardo, há $3 \times 3 = 9$ maneiras distintas de distribuir as bicicletas de modo que o Bruno não fique com a bicicleta do Afonso.

   Assim, há $2 + 9 = 11$ maneiras distintas de distribuir as bicicletas de modo que o Afonso fique com a bicicleta do Bruno.

   Como o Afonso pode não ficar com a bicicleta do Bruno mas com qualquer uma das bicicletas dos outros quatro rapazes, conclui-se que os cinco rapazes podem trocar de bicicletas de $4 \times 11 = 44$ maneiras diferentes.

   Solução 2: Considere-se inicialmente que, entre os 5 rapazes, há 2 que trocam de bicicletas entre si. Então, a troca das restantes 3 bicicletas fica determinada pela escolha da bicicleta por um dos 3 rapazes, o que pode acontecer de 2 maneiras diferentes. Como há $\frac{5\times4}{2} = 10$ maneiras diferentes de escolher 2 rapazes entre 5, há exactamente $10 \times 2 = 20$ maneiras diferentes dos 5 rapazes trocarem de bicicletas nas condições referidas.

   Considere-se agora que não há 2 rapazes, entre os 5, que troquem de bicicletas entre si. Então, também não pode haver 3 rapazes que troquem de bicicletas entre si, pois, se assim fosse, os restantes 2 trocariam entre si. E também não pode haver 4 rapazes que troquem de bicicletas entre si, pois, nesse caso, o restante rapaz ficaria com a sua própria bicicleta. Assim, nas condições referidas, as bicicletas têm de ser trocadas entre os 5 rapazes da seguinte forma: o Afonso fica com a bicicleta de um dos restantes 4 rapazes, a bicicleta do Afonso fica para um dos restantes 3, a bicicleta do rapaz que fica com a bicicleta do Afonso fica para um dos restantes 2 rapazes, ficando a bicicleta do rapaz escolhido entre esses dois para o que resta dos dois e a bicicleta do que resta dos dois para o rapaz que dá a bicicleta ao Afonso. Há exactamente $4 \times 3 \times 2 = 24$ maneiras diferentes das bicicletas serem trocadas entre os 5 rapazes desta forma.

   Portanto, os cinco rapazes podem trocar de bicicletas de $20 + 24 = 44$ maneiras diferentes.

4. **Solução 1:** Observe-se que ao mudar o sinal dos números de todos os vértices de uma face, o sinal do número dessa face não se altera. Assim, ao mudar o sinal dos números de todos os vértices do cubo, o número de faces com o número 1 mantém-se.

   - Um cubo com o número 1 (ou o número -1) em todos os vértices tem o número 1 em todas as faces; logo, a soma dos 14 números é 14 (ou $-8 + 6 = -2$).
   - Um cubo com o número 1 (ou o número -1) em 7 vértices tem 3 faces com o número 1 e 3 faces com o número -1; logo, a soma dos 14 números é $7 - 1 = 6$ (ou $-7 + 1 = -6$).
   - Um cubo com o número 1 (ou o número -1) em 6 vértices tem 4 faces, 2 faces ou nenhuma com o número 1; logo, os valores possíveis para a soma dos 14 números são $6 - 2 + 4 - 2 = 6$, $6 - 2 + 2 - 4 = 2$ e $6 - 2 - 6 = -2$ (ou $2 - 6 + 4 - 2 = -2$, $2 - 6 + 2 - 4 = -6$ e $2 - 6 - 6 = -10$).
   - Um cubo com o número 1 (ou o número -1) em 5 vértices tem 3 faces com o número 1; logo, a soma dos 14 números é $5 - 3 = 2$ (ou $3 - 5 = -2$).

- Um cubo com o número 1 em 4 vértices tem 4 faces com o número 1, todas as faces com o número 1 ou nenhuma; logo, os valores possíveis para a soma dos 14 números são $4-2=2$, 6 e -6.

Portanto, os valores possíveis para a soma dos 14 números são -10, -6, -2, 2, 6 e 14.

Solução 2:

Solução parcial a: Observe-se que entre os 5 números associados a cada face, há um número ímpar de números iguais a 1. Considere-se a soma desses 5 números para cada face e calcule-se a soma das 6 somas assim obtidas. Esta soma tem um número par de parcelas iguais a 1 e um número par de parcelas iguais a -1 e, além disso, pode decompor-se na soma dos 14 números do cubo com o dobro da soma dos 8 números dos vértices. Logo, a soma dos 14 números tem um número par de parcelas iguais a 1 e um número par de parcelas iguais a -1.

Solução parcial b: Seja p o produto dos 8 números dos vértices. Como cada vértice do cubo é vértice de exactamente 3 faces, o produto dos 6 números das faces é p^3 e, consequentemente, o produto dos 14 números é p^4 e é necessariamente igual a 1. Portanto, a soma dos 14 números tem um número par de parcelas iguais a 1 e um número par de parcelas iguais a -1.

Assim, o número de parcelas iguais a 1 é da forma $2k$, $k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ e o correspondente número de parcelas iguais a -1 é $14-2k$, pelo que a soma dos 14 números do cubo é $s = 4k - 14$, para $k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$.

Resta analisar se existem configurações do cubo para cada um dos casos considerados:

(a) $k = 0$ e $s = -14$ (não existe nenhum cubo nas condições indicadas).

(b) $k = 1$ e $s = -10$ (um cubo que tem apenas 2 vértices diagonalmente opostos e em faces distintas com o número 1 está nas condições indicadas).

(c) $k = 2$ e $s = -6$ (um cubo que tem apenas 1 vértice com o número 1 está nas condições indicadas).

(d) $k = 3$ e $s = -2$ (um cubo que tem apenas 2 vértices de uma aresta com o número 1 está nas condições indicadas).

(e) $k = 4$ e $s = 2$ (um cubo que tem apenas 3 vértices de uma face e 1 vértice da face oposta com o número 1, de modo que tenha apenas uma face com o número 1 em 3 vértices, está nas condições indicadas).

(f) $k = 5$ e $s = 6$ (um cubo que tem apenas 1 vértice com o número -1 está nas condições indicadas).

(g) $k = 6$ e $s = 10$ (não existe nenhum cubo nas condições indicadas).

(h) $k = 7$ e $s = 14$ (um cubo que tem todos os vértices com o número 1 está nas condições indicadas).

Portanto, os valores possíveis para a soma dos 14 números são -10, -6, -2, 2, 6 e 14.