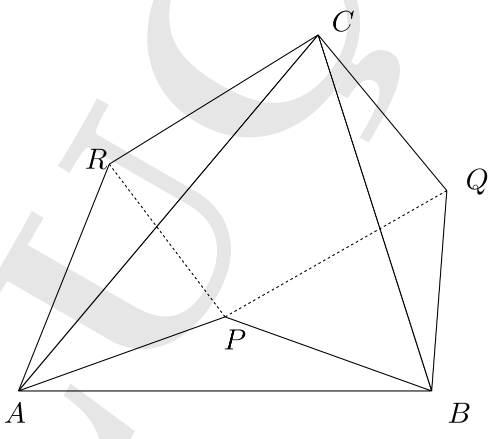
Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Seja $abcdefghi$ um número com 9 dígitos. Para que a sequência dos primeiros 4 dígitos se repita na sequência dos 5 dígitos finais, então ou "$abcd$" $=$ "$efgh$" ou "$abcd$" $=$ "$fghi$". Como há 10 algarismos possíveis para cada dígito, o número de possibilidades para a sequência inicial é $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$. Suponhamos que "$abcd$" $=$ "$efgh$". Então, como há também 10 possibilidades para o valor de i, há $10^4 \times 10 = 10^5$ números com 9 dígitos tais que "$abcd$" $=$ "$efgh$". Da mesma forma, há 10^5 números com 9 dígitos em que "$abcd$" $=$ "$fghi$".

   Então para contarmos os números de 9 dígitos $abcdefghi$ em que "$abcd$" $=$ "$efgh$" ou "$abcd$" $=$ "$fghi$" devemos subtrair a $10^5 + 10^5$ o número de casos em que tanto "$abcd$" $=$ "$efgh$" como "$abcd$" $=$ "$fghi$". Mas "$abcd$" $=$ "$efgh$" como "$abcd$" $=$ "$fghi$" implica que $a = e = f$, $b = f = g$, $c = g = h$ e $d = h = i$, pelo que necessariamente todos os dígitos têm que ser iguais. Há, assim, 10 casos em que "$abcd$" $=$ "$efgh$" e "$abcd$" $=$ "$fghi$". Em conclusão, há $2 \times 10^5 - 10$ números de 9 dígitos em que a sequência dos primeiros 4 dígitos se repete na sequência dos 5 dígitos finais.

2. Como os triângulos $[ACR]$ e $[ABP]$ são semelhantes, tem-se $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$ e $R\hat{A}P = C\hat{A}B$. Por isso, os triângulos $[APR]$ e $[ABC]$ são semelhantes.



   Da mesma foram se conclui que $[PBQ]$ e $[ABC]$ também são semelhantes, e por isso, os triângulos $[APR]$ e $[PBQ]$ são semelhantes. Deste modo, tem-se

$$\frac{\overline{RP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{PQ}}.$$

   Como P pertence à mediatriz de $[AB]$, tem-se $\overline{AP} = \overline{BP}$ e, portanto, $\overline{RP} = \overline{BQ}$ e $\overline{PQ} = \overline{AR}$. Tendo em conta que Q e R também pertencem às mediatrizes de $[AC]$ e $[BC]$, respectivamente, conclui-se que $\overline{RP} = \overline{CQ}$ e $\overline{PQ} = \overline{CR}$, ou seja, o quadrilátero $[CRPQ]$ é um paralelogramo.

3. Para $n = 1$ o resultado é imediato, bastando acender a única lâmpada.

   Suponha-se que o resultado é verdadeiro para um dado valor de n e considere-se um conjunto de $n+1$ luzes apagadas. Representando cada luz apagada por um 0 e cada luz acesa por um 1, pretende-se passar do estado $\underbrace{00\ldots00}_{n}0$ para o estado $\underbrace{00\ldots00}_{n}1$.

   Sabe-se que existe uma sequência S de operações que permite passar do estado $\underbrace{00\ldots00}_{n}0$ para o estado $\underbrace{00\ldots01}_{n}0$. Depois de efectuar estas operações é possível acender a lâmpada $n+1$ chegando-se ao estado $\underbrace{00\ldots01}_{n}1$. Finalmente, executando a sequência de operações inversa de S, chega-se ao estado $\underbrace{00\ldots00}_{n}1$.