Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XXII OPM - 12.11.2003 - Pré-Olimpíadas

http://www.spm.pt/~opm

Duração: 2 horas
Questão 1: 20 pontos
Questões 2, 3: 10 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2 e 3.
Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correcta.
Não é permitido o uso de calculadoras.

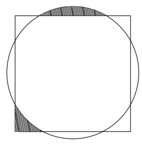
No Reino da Geometria

1. Em cada uma das alíneas seguintes escolhe a opção correcta. Cada resposta errada será cotada negativamente.

   (a) Os 37 Cavaleiros do Reino são seres estranhamente geométricos, uns quadrados, outros círculos. Sabendo que há mais 5 quadrados do que círculos, quantos Cavaleiros são quadrados?

   A) 16 B) 19 C) 21 D) 27 E) 32

   (b) Dois Cavaleiros, um quadrado e um círculo, têm o mesmo centro. Se as regiões a sombreado tiverem a mesma área e o círculo tiver área 1, qual será a área do quadrado?



   A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

   (c) Do interior do Pentágono Real saíram 3 Cavaleiros quadrados e entraram 7 círculos, em seguida, saíram 2 quadrados e um círculo e, finalmente, saíram 12 círculos. Sabendo que o Pentágono Real ficou vazio, quantos Cavaleiros estavam inicialmente no seu interior?

   A) 1 B) 7 C) 9 D) 10 E) 11

   (d) Para aceder ao interior do Pentágono Real é necessário um número secreto constituído por 4 algarismos. Se a soma dos quatro algarismos do número secreto é 9, nenhum deles é 0 e, além disso, o número é múltiplo de 5 e maior do que 2003, qual é o terceiro algarismo do número secreto?

   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Solução

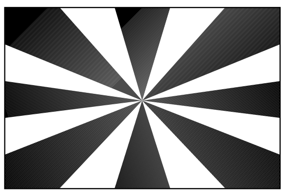
O corta-mato

2. No domingo passado a Cristina participou num corta-mato. Ao fim de alguns minutos de corrida, observou que o número de atletas que estavam à sua frente era igual ao número de atletas que estavam atrás de si. Entretanto, a Cristina conseguiu ultrapassar 8 adversários. Nessa altura, o número de atletas que estavam atrás de si era o dobro do número de atletas que estavam à sua frente. Quantos atletas participaram no corta-mato?

Solução

Tácebem

3. O Tó Mané é adepto do *Futebol Clube Tácebem* e resolveu fazer uma bandeira para apoiar a sua equipa no jogo contra o *Desportivo do YéYé*. Comprou um pano branco rectangular com 1 m por 80 cm de lado, dividiu cada um dos lados em cinco partes iguais, marcou o centro do rectângulo e pintou o pano da forma indicada na figura. Qual é a área de pano que ficou por pintar?



Solução

Questão 1: 20 pontos
Questões 2, 3: 10 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) (C)
   (b) (B)
   (c) (E)
   (d) (A)

Enunciado da Prova

Sugestões para a resolução dos problemas

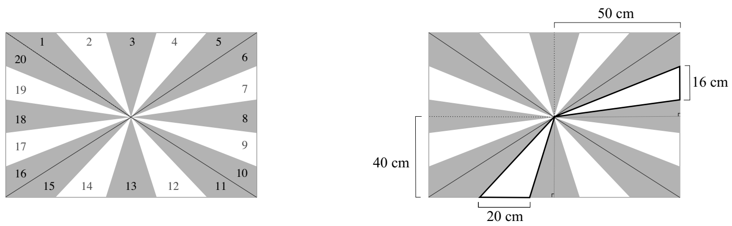
2. Como inicialmente o número de atletas que estavam à frente da Cristina era igual ao número de atletas que estavam atrás dela, a Cristina tinha à sua frente exactamente metade do número dos seus adversários. Após ter ultrapassado 8 atletas, o número de atletas que estavam atrás dela passou a ser o dobro do número de atletas que estavam à sua frente. Sendo assim, os atletas que estavam, nessa altura, à sua frente eram exactamente uma terça parte dos seus adversários. Então 8 é $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ do número dos seus adversários. Portanto, o número dos seus adversários é $8 \times 6 = 48$. Assim, contando com a Cristina, participaram 49 atletas no corta-mato.

Enunciado da Prova

Questão 1: 20 pontos
Questões 2, 3: 10 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

3. Em primeiro lugar observe-se que a bandeira pode ser dividida em 20 triângulos (8 brancos e 12 pintados) como indicado na figura (a).



(a) (b)

Solução 1: Determine-se a área de cada um dos triângulos. Tome-se como base de cada um dos 10 triângulos 1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14 e 15 o lado que está sobre o lado do rectângulo. Assim, os 10 triângulos têm $\frac{100}{5} = 20$ cm de base e $\frac{80}{2} = 40$ cm de altura, logo, a área de cada um deles é $\frac{1}{2} \times 20 \times 40 = 400$ cm^2. Analogamente, tome-se como base de cada um dos restantes triângulos, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19 e 20, o lado que está sobre o lado do rectângulo. Deste modo, os 10 triângulos têm $\frac{80}{5} = 16$ cm de base e $\frac{100}{2} = 50$ cm de altura, logo, a área de cada um deles também é 400 cm^2. Portanto, os 20 triângulos têm todos a mesma área, 400 cm^2. Uma vez que há 8 triângulos por pintar, a área de pano que o Tó Mané não pintou é $8 \times 400 = 3200$ cm$^2 = 0,32$ m^2.

Solução 2: Tome-se como base de cada um dos 10 triângulos 1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14 e 15 o lado que está sobre o lado do rectângulo. Assim, os 10 triângulos têm a mesma base e a mesma altura, logo, a mesma área. Como 4 destes 10 não estão pintados, $\frac{2}{5}$ da área abrangida por estes 10 triângulos não está pintada. Analogamente, tome-se como base de cada um dos restantes triângulos, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19 e 20, o lado que está sobre o lado do rectângulo. Deste modo, os 10 triângulos têm a mesma base e a mesma altura, logo, a mesma área. Como 4 destes 10 não estão pintados, $\frac{2}{5}$ da área abrangida por estes 10 triângulos não está pintada. Portanto, $\frac{2}{5}$ da área do rectângulo não está pintada e conclui-se que o Tó Mané não pintou $\frac{2}{5} \times 80 \times 100 = 3200$ cm$^2 = 0,32$ m^2 de pano.

Enunciado da Prova