Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XXII OPM - 1ª Eliminatória - 12.11.2003 - Categoria B - 10º/12º

http://www.spm.pt/~opm

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

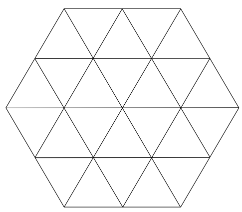
Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. A mãe da Ana Margarida vende doces e pediu-lhe que embrulhasse 2003 rebuçados de 5 cores diferentes em pacotes de 3, de forma que em cada pacote os rebuçados fossem da mesma cor. Como recompensa prometeu-lhe que poderia comer os rebuçados que restassem quando já não fosse possível fazer mais embrulhos. Quantos rebuçados, no máximo, poderá a Ana Margarida comer? Solução

2. Desenha um triângulo equilátero $[ABC]$ e considera, sobre o lado $[AB]$, um ponto D tal que $\overline{AB} = 7\overline{AD}$, sobre o lado $[BC]$, um ponto E tal que $[DE] \parallel [AC]$ e, sobre o lado $[AC]$, um ponto F tal que $[DF] \parallel [BC]$. Se G é um ponto pertencente a $[DE]$, qual é a razão entre a área do triângulo $[FGC]$ e a área do triângulo $[ABC]$? Solução

3. Uma capicua é um número cuja leitura é a mesma quando feita da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Por exemplo, os números 121, 2002 e 32723 são capicuas. Existe algum número, maior do que 1, que divida todas as capicuas de 4 algarismos? Solução

4. O jardim da Joana tem forma hexagonal e está dividido em canteiros que são triângulos equiláteros com 1 m de lado. Na figura está representada a planta de um jardim, no caso em que o lado do hexágono mede 2 m. A Joana plantou flores em 1000 canteiros do seu jardim, deixando por plantar os canteiros com lados comuns a um canteiro plantado. Quanto mede, no mínimo, o lado do hexágono do jardim da Joana?



Solução

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Se for possível fazer X embrulhos de 3 rebuçados, então $2003 = X \times 3 + R$, sendo R o número de rebuçados que a Ana Margarida poderá comer. Como o resto da divisão de 2003 por 3 é 2, R pode ser igual a 2, 5, 8, 11, 14, ... No entanto, como podem, no máximo, sobrar 2 rebuçados de cada cor, R não pode ser maior que 10. Assim, a Ana Margarida poderá, no máximo, comer 8 rebuçados.

Enunciado da Prova

Olimpíadas Portuguesas
de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXII OPM - 1ª Eliminatória - 12.11.2003 - Categoria B - 10º/12º

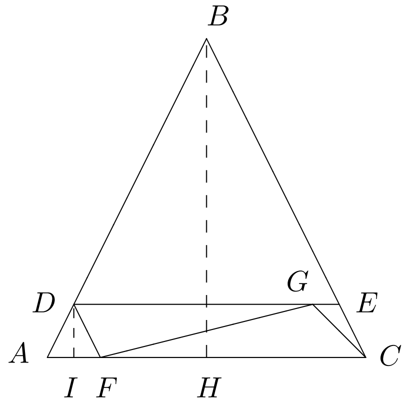
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

2. Como $[DF] \parallel [BC]$, os triângulos $[ADF]$ e $[ABC]$ são semelhantes e, assim, o triângulo $[ADF]$ é equilátero e $\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{7}$. Também os triângulos rectângulos $[ADI]$ e $[ABH]$ são semelhantes e $\frac{\overline{DI}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{7}$. Seja qual for o ponto $G \in [DE]$, os triângulos $[ADF]$ e $[FGC]$ têm a mesma altura. Sendo assim, a área do triângulo $[FGC]$ é

$$A_{[FGC]} = \frac{1}{2}\,\overline{DI}\ \times \overline{FC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\,\overline{BH}\right)\left(\frac{6}{7}\,\overline{AC}\right) = \frac{6}{7^2}\ \left(\frac{1}{2}\,\overline{BH} \times \overline{AC}\right) = \frac{6}{7^2}\,A_{[ABC]}$$

e conclui-se que a razão entre as áreas dos triângulos $[FGC]$ e $[ABC]$ é $\frac{6}{7^2}$.



Enunciado da Prova

Sugestões para a resolução dos problemas

3. Uma capicua de 4 algarismos é um número da forma $ABBA$, onde A e B são algarismos e $A \neq 0$. Logo, pode decompor-se da seguinte maneira.

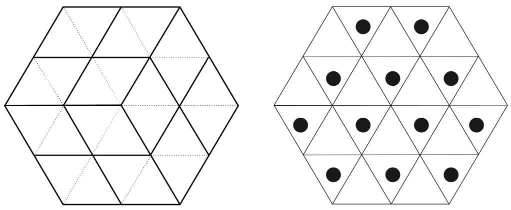
$$ABBA = A \times 1000 + B \times 100 + B \times 10 + A = A \times 1001 + B \times 110$$

Como $1001 = 7 \times 11 \times 13$ e $110 = 2 \times 5 \times 11$, conclui-se que 11 é o único número maior do que 1 que divide $ABBA$, para quaisquer algarismos A e B.

Enunciado da Prova

Sugestões para a resolução dos problemas

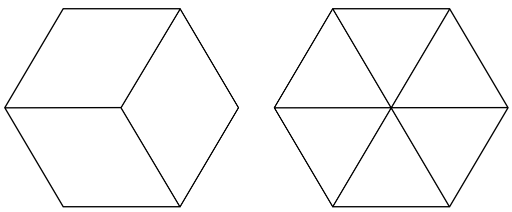
4. Agrupando os canteiros aos pares como se mostra na figura (a), observa-se que, em cada par, tem de existir pelo menos um canteiro por plantar. Assim, a Joana plantou flores, no máximo, em metade dos canteiros. É sempre possível usar exactamente metade dos triângulos, como se mostra na figura (b) para o caso do hexágono de lado 2. Assim, e visto que o jardim tem 1000 canteiros plantados, conclui-se que no jardim da Joana há pelo menos 2000 triângulos.



(a) (b)

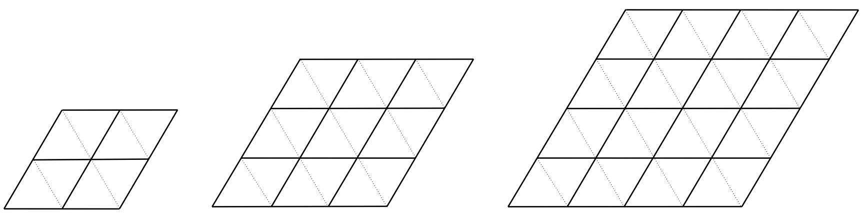
Apresentam-se, em seguida, duas formas de contar os triângulos.

Contagem 1: Um hexágono regular pode dividir-se em 3 paralelogramos, como se mostra na figura (c).



(c) (d)

Cada um destes paralelogramos de base n pode dividir-se em n^2 paralelogramos de base 1, cada um deles constituído por dois triângulos equiláteros de lado 1, como se indica na figura seguinte para os casos $n = 2, 3$ e 4.



$(n = 2)$ $(n = 3)$ $(n = 4)$

Logo, no total, cada paralelogramo tem $2n^2$ triângulos de lado 1 e, consequentemente, um hexágono regular de lado n tem $6n^2$ triângulos de lado 1.

(Continua)

Sugestões para a resolução dos problemas

Contagem 2: Um hexágono regular pode dividir-se em 6 triângulos equiláteros, como se mostra na figura (d). Num triângulo equilátero de lado n há $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ triângulos de lado 1. Logo, um hexágono regular de lado n tem $6n^2$ triângulos de lado 1.

Assim, para que o hexágono tenha pelo menos 2000 triângulos, tem-se $6n^2 \geq 2000$, logo, $n \geq 19$. Portanto, o lado do hexágono mede, no mínimo, 19 m.

Enunciado da Prova