Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXI OPM - Final - 1º dia - 11.04.2003 - Categoria B

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução de problemas

1. A camada de espuma deve, no mínimo, ser constituída por 6 paralelepípedos de dimensões $0,5\times 1\times 1$, contíguos a cada uma das 6 faces do cubo, 12 quartos de cilindro com 1 de altura e $0,5$ de raio de base, alinhados com cada uma das 12 arestas do cubo e 8 oitavos de esfera de raio $0,5$ centrados em cada um dos oito vértices do cubo. Assim, o volume mínimo de espuma mede

$$6\times 0,5\times 1\times 1+3\times 1\times \pi\times (0,5)^2+\frac{4}{3}\times \pi\times (0,5)^3=3+\frac{11}{12}\pi\,\mathrm{km}^3.$$

2. Denote-se por t_n o número de tubos metálicos numa coluna hexagonal, em que n representa o número de tubos numa das faces da coluna. Determine-se inicialmente t_n.

Solução 1: É claro que $t_1=1$. Para $n\geq 2$, $t_n=t_{n-1}+6(n-1)$, ou seja,

$$t_n=1+6(1+\ldots+(n-1))=1+6\times\frac{1+n-1}{2}\times(n-1)=1+3n(n-1).$$

Solução 2: Tem-se $t_1=1$, $t_2=2+3+2=2\times 2+3$, $t_3=3+4+5+4+3=2\times(3+4)+5$ e para $n\geq 4$,

$$\begin{aligned} t_n &= 2[n+(n+1)+\ldots+(n+n-2)]+(n+n-1)\\ &= 2\times\frac{n+n+n-2}{2}\times(n-1)+(2n-1)\\ &= 3n^2-3n+1=1+3n(n-1). \end{aligned}$$

Portanto, para todo $n\geq 1$, $t_n=1+3n(n-1)$.

Seja m o número inteiro tal que t_m termina em 2003, ou seja, $t_m-1=3m(m-1)$ termina em 2002. Seja a o algarismo das unidades de $m-1$. O algarismo das unidades de t_m-1 é o algarismo das unidades do número $3a(a+1)$ e, como se pode ver na tabela, não pode ser 2. Logo, não existe m tal que t_m-1 termine em 2. Consequentemente, não se pode construir uma coluna cujo número de tubos termine em 2003.

a	$3a(a+1)$
0	0
1	6
2	18
3	36
4	60
5	90
6	126
7	168
8	216
9	270

3. Considerem-se 650 coroas circulares centradas em cada um dos pontos pintados. Todas estas coroas estão contidas num círculo de raio $16+3=19$. Se cada ponto deste círculo fosse coberto quando muito por 9 coroas, a área correspondente às 650 coroas não poderia exceder a área correspondente a 9 círculos de raio 19 que mede $9\times\pi\times 19^2=3249\pi$. Mas a soma das medidas de área das 650 coroas é $650\times\pi\times\left(3^2-2^2\right)=3250\pi$. Assim, existe pelo menos um ponto no círculo de raio 19 que pertence a 10 coroas e, portanto, a coroa circular centrada nesse ponto contém pelo menos 10 pontos pintados.