

OLIMPIADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

<http://www.spm.pt/~opm>

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

Duração: 3 horas

A questão 1 vale 16 pontos; as questões 2 e 3 valem 7 pontos cada uma.

1. Em cada uma das alíneas seguintes escolhe a opção correcta, justificando-a.

- (a) O colar de safiras da Cleópatra indicado na figura tem 2002 pedras na primeira fila. Quantas pedras tem o colar?
- ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ ...
◇◇◇ ◇◇◇ ◇◇◇
◇◇ ◇◇ ◇◇
◇ ◇ ◇

- A) 4024 B) 4204 C) 4240 D) 4402 E) 4420

- (b) Quando o Calvin pediu uma mesada ao pai, este respondeu-lhe: “Calcula a soma de todos os números ímpares de dois algarismos e subtrai-lhe a soma de todos os números pares de dois algarismos. O resultado obtido será o valor da tua mesada.” Qual será a mesada do Calvin?

- A) 45€ B) 46€ C) 48€ D) 49€ E) 50€

- (c) Qual é a razão entre o perímetro de um círculo e o perímetro de um quadrado que têm a mesma área?

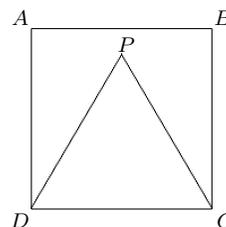
- A) $\frac{2}{\pi}$ B) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ E) $\frac{\pi}{2}$

- (d) Harry Potter e Ron Weasley prepararam duas poções mágicas, de igual volume, com lágrimas de crocodilo e suor de gato preto. A razão entre o volume de lágrimas e o volume de suor obtida na poção do Harry foi 3 e a obtida na poção do Ron foi 2. Com um golpe da sua varinha mágica o professor Severus Snape misturou as duas poções no mesmo caldeirão. Qual foi a razão obtida?

- A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{17}{7}$ D) $\frac{23}{9}$ E) $\frac{25}{11}$

Solução

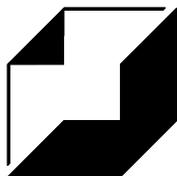
2. Na figura, $[ABCD]$ é um quadrado e $[CDP]$ é um triângulo equilátero. Qual é a amplitude de $\angle PBC$?



Solução

3. A palavra chave que a Ana Viso escolheu para o seu computador tem os 7 caracteres do seu nome: A, N, A, V, I, S, O. Ordenando por ordem alfabética todas as palavras diferentes formadas por todos estes 7 caracteres, a palavra chave da Ana surge na 881^a posição. Qual é a palavra chave da Ana?

Solução



OLIMPIADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

<http://www.spm.pt/~opm>

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

A questão 1 vale 16 pontos; as questões 2 e 3 valem 7 pontos cada uma.

1. (a) Como $2002 = 400 \times 5 + 2$, o colar da Cleópatra tem $(5 + 3 + 2 + 1) \times 400 + 2 = 11 \times 400 + 2 = 4402$ pedras.

Opção correcta: D)

- (b) $(11 + 13 + 15 + \dots + 97 + 99) - (10 + 12 + 14 + \dots + 96 + 98)$
 $= (11 - 10) + (13 - 12) + (15 - 14) + \dots + (97 - 96) + (99 - 98)$
 $= 45 \times 1 = 45.$

Opção correcta: A)

- (c) Sejam l o comprimento do lado do quadrado e r a medida do raio do círculo. O círculo e o quadrado têm a mesma área, ou seja, $l^2 = \pi r^2$, logo $l = \sqrt{\pi}r$. Assim a razão entre o perímetro do círculo e o perímetro do quadrado é

$$\frac{2\pi r}{4l} = \frac{\pi r}{2\sqrt{\pi}r} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Opção correcta: D)

- (d) Sejam S_1 e S_2 as quantidades de suor de gato preto das poções do Harry e do Ron. As correspondentes quantidades de lágrimas de crocodilo são $3S_1$ e $2S_2$. Como as duas poções têm igual volume tem-se $4S_1 = 3S_2$ e a razão obtida é

$$\frac{3S_1 + 2S_2}{S_1 + S_2} = \frac{4(3S_1 + 2S_2)}{4(S_1 + S_2)} = \frac{3(4S_1) + 8S_2}{4S_1 + 4S_2} = \frac{3(3S_2) + 8S_2}{3S_2 + 4S_2} = \frac{17}{7}.$$

Opção correcta: C)

[Enunciado da Prova](#)

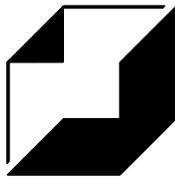


SUGESTÕES para a resolução dos problemas

A questão 1 vale 16 pontos; as questões 2 e 3 valem 7 pontos cada uma.

2. Como o triângulo $[CDP]$ é equilátero, $\widehat{DCP} = 60^\circ$ e $\widehat{PCB} = 30^\circ$. Por outro lado, $\overline{PC} = \overline{DC} = \overline{BC}$, logo $[BCP]$ é um triângulo isósceles de base \overline{PB} e $\widehat{CPB} = \widehat{PBC}$. A soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[BCP]$ é 180° , isto é, $\widehat{CPB} + \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = 180^\circ$, donde $2\widehat{PBC} = 150^\circ$ e, portanto, $\widehat{PBC} = 75^\circ$.

Enunciado da Prova



SUGESTÕES para a resolução dos problemas

A questão 1 vale 16 pontos; as questões 2 e 3 valem 7 pontos cada uma.

3. Ao ordenar as palavras por ordem alfabética aparecem em primeiro lugar as começadas por *A*, que são $6! = 720$. De seguida estão as $\frac{6!}{2} = 360$ palavras que começam por *I*. Atendendo a que $720 < 881 < 720 + 360$ conclui-se que a palavra chave que a Ana escolheu começa por *I*. Como $881 - 720 = 161$, trata-se da 161^a palavra que começa por esse caracter. Existem $5! = 120$ palavras que começam por *IA* e $\frac{5!}{2} = 60$ palavras que começam por *IN*. Atendendo a que $120 < 161 < 120 + 60$, conclui-se que a palavra chave que a Ana escolheu começa por *IN* (é a 41^a palavra desse tipo). Existem $4! = 24$ palavras que começam por *INA*, $\frac{4!}{2} = 12$ palavras que começam por *INO* e $\frac{4!}{2} = 12$ palavras que começam por *INS*. Como $24 + 12 < 41 < 24 + 12 + 12$, a palavra chave que a Ana escolheu começa por *INS* (é a 5^a palavra dessa forma). Como existem $3! = 6$ palavras que começam por *INSA* a palavra chave é a penúltima desse grupo, ou seja, a palavra *INSAVAO*.

Enunciado da Prova