Sugestões para a resolução dos problemas

1. Designando por a o algarismos das dezenas de n e por b o algarismo das unidades, queremos descobrir todos os pares ab de algarismos não nulos para os quais existe k inteiro (positivo) tal que:

$$100a + b = k(10a + b) \Leftrightarrow 10a(10 - k) = (k - 1)b\ .$$

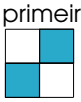
Se existir k nestas condições, então:

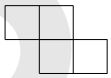
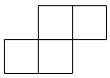
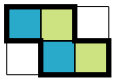
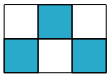
$$k = \frac{100a + b}{10a + b} < \frac{100a + 10}{10a + 1} = 10 \text{ e } k = \frac{100a + b}{10a + b} > \frac{100a}{10a + 10a} = 5$$

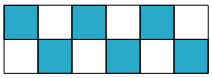
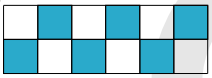
Temos então que k está entre 6 e 9. Vamos substituir na equação k por estes valores e descobrir todas as soluções.

- Para $k = 6$, temos que $40a = 5b \Leftrightarrow b = 8a$. A única solução possível é $a = 1$ e $b = 8$.
- Para $k = 7$, temos que $30a = 6b \Leftrightarrow b = 5a$. A única solução possível é $a = 1$ e $b = 5$.
- Para $k = 8$, temos que $20a = 7b$. Esta equação não tem nenhuma solução inteira com b entre 1 e 9.
- Para $k = 9$, temos que $10a = 8b \Leftrightarrow 4b = 5a$. A única solução possível é $a = 4$ e $b = 5$.

Existem três números com a propriedade pretendida: 15, 18 e 45.

2. Como podemos colocar uma peça sobre as duas primeiras colunas do tabuleiro, então os seus quadrados têm três cores diferentes, ou seja, há exatamente duas quadrículas da mesma cor. Pela primeira condição, estas quadrículas não estão lado a lado, logo as cores repetidas são do tipo ou  .

Da mesma forma, o quadrado formado pela segunda e terceira colunas tem uma disposição de cores de um desses tipos. Como, ao colocar uma peça do tipo  ou  nas três primeiras colunas, os quadrados correspondentes têm três cores diferentes, então o tipo usado nas duas primeiras colunas é diferente do tipo usado na segunda e terceira colunas, pois se o tipo fosse o mesmo teríamos apenas duas cores, como na figura  . Portanto, as três primeiras colunas têm uma coloração do tipo ou  .

Repetindo este raciocínio, concluímos que o tabuleiro tem uma coloração do tipo  ... ou  ... .

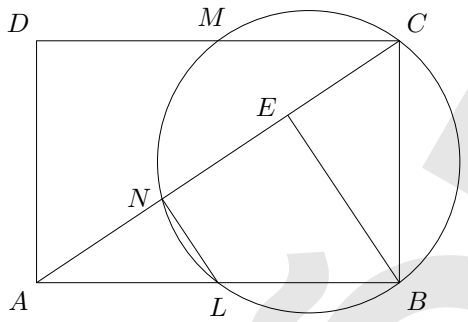
As casas restantes têm que usar uma das outras três cores e, em colunas adjacentes, têm que ser de cores diferentes, ou seja, há 3×2^{2025} formas de escolher essas cores.

Como há 4 escolhas para a cor comum a todas as colunas, existem, no total, há $4 \times 2 \times 3 \times 2^{2025} = 3 \times 2^{2028}$ formas de pintar o tabuleiro.

SOLUÇÕES

3. **Solução 1.** Seja L o ponto médio de $[AB]$. Note-se que $[CMLB]$ é um retângulo.

Como N e L são os pontos médios de $[AE]$ e $[AB]$, respetivamente, as retas LN e BE são paralelas. Como $BE \perp AC$, conclui-se que $LN \perp AC$, e assim $C\widehat{N}L = 90°$. Como além disso, $C\widehat{B}L = C\widehat{M}L = 90°$, conclui-se que B, C, M, N e L estão todos sobre a circunferência Γ de diâmetro $[CL]$.



Como $B\widehat{C}M = 90°$, o segmento $[BM]$ também é um diâmetro de Γ. Assim, como N está sobre Γ, conclui-se que $B\widehat{N}M = 90°$.

Solução 2. Comece-se por notar que os triângulos retângulos $[ABE]$ e $[DBC]$ são semelhantes, porque se tem $B\widehat{E}A = B\widehat{C}D = 90°$, e $E\widehat{A}B = C\widehat{A}B = C\widehat{D}B$. Conclui-se assim que

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DC}}.$$

Como $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{NE}$ e $\overline{DC} = 2 \cdot \overline{MC}$, tem-se $\frac{\overline{AE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{NE}}{\overline{MC}}$. Logo,

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{NE}}{\overline{MC}}.$$

Como $B\widehat{E}N = B\widehat{C}M = 90°$, conclui-se pelo critério AA que os triângulos $[NBE]$ e $[MBC]$ são semelhantes.

Dessa semelhança resulta que

$$N\widehat{B}M = N\widehat{B}E - M\widehat{B}E = M\widehat{B}C - M\widehat{B}E = E\widehat{B}C.$$

Como já vimos que $\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{NE}}{\overline{MC}}$, conclui-se pelo critério AA que os triângulos $[NBM]$ e $[EBC]$ são semelhantes. Assim, tem-se $B\widehat{N}M = B\widehat{E}C = 90°$.

4. Sejam $a_1 < \cdots < a_n$ os elementos de S e d a menor diferença entre dois destes elementos. Como $2d \in S$, então $2d \geq a_1$, ou seja, $d \geq \frac{a_1}{2}$.

Logo, $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 \geq (n-1)d + a_1 \geq \frac{(n+1)a_1}{2}$.

Por outro lado, $2(a_n - a_1) \in S$, logo $2(a_n - a_1) \leq a_n$, ou seja, $a_n \leq 2a_1$.

Assim, $2a_1 \geq \frac{(n+1)a_1}{2}$, ou seja, $n \leq 3$.

O conjunto $S = \{2, 3, 4\}$ verifica as condições, uma vez que $2(3-2) = 2(4-3) = 2 \in S$ e $2(4-2) = 4 \in S$. Logo o maior valor possível para n é 3.

SOLUÇÕES