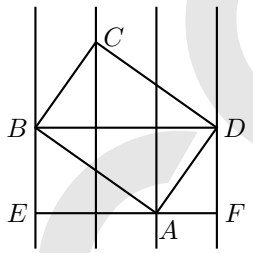
XLIV OPM - 1ª Eliminatória - 5.11.2025 - Categoria B - 10º/12º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção A). (O *comprimento da base tem que ímpar e menor que* $\frac{31}{2}$, *havendo* 8 *opções*.)
   (b) Opção D). ($10 \times 2 \times 3 = 60$.)
   (c) Opção E). (*São os números da forma* $9k$, *que têm os padrinhos* $10k$ *e* $10k - 1$.)
   (d) Opção C). ($ab = (a+2)(b-4) = (a-1)(b+4)$ *tem como solução única* $a = 4$ *e* $b = 12$.)

2. Como indicado na figura seguinte, sejam A, B, C e D os vértices da bandeira e sejam E e F os pontos onde a reta paralela ao chão que passa por A interseta as duas barras exteriores.



Note-se que:

- Como a distância $\overline{AF}$ é igual à distância entre duas barras consecutivas e a distância $\overline{AE}$ é igual ao dobro da distância entre duas barras consecutivas, tem-se $\overline{AE} = 2\overline{AF}$;
- Como os vértices B e D estão à mesma altura do chão, tem-se $\overline{BE} = \overline{DF}$.

Seja r a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$. Como as retas AE e BD são paralelas, tem-se $B\widehat{A}E = D\widehat{B}A$. Como além disso $B\widehat{A}D = 90^\circ = A\widehat{E}B$, os triângulos $[ABD]$ e $[EAB]$ são semelhantes. De modo análogo, os triângulos $[ABD]$ e $[FDA]$ são semelhantes.

Assim, tem-se que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{DA}} = r,$$

ou seja, $\overline{AE} = r\overline{BE}$. Além disso,

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{DA}} = r,$$

ou seja, $\overline{AF} = \frac{\overline{DF}}{r}$.

Como $\overline{AE} = 2\overline{AF}$, conclui-se que

$$r\overline{BE} = 2 \cdot \frac{\overline{DF}}{r} = 2 \cdot \frac{\overline{BE}}{r},$$

pelo que $r = \frac{2}{r}$, isto é, $r^2 = 2$. Assim $r = \sqrt{2}$, ou seja, a razão entre o lado maior e o lado menor da bandeira é igual a $\sqrt{2}$.

SOLUÇÕES

3. Como o João ficou em quarto lugar e há menos de dez jogadores, então o número de jogadores é $4, 5, 6, 7, 8$ ou 9.

   O número total de pontos para estes números de jogadores é $6, 10, 15, 21, 28, 36$, respetivamente. Os casos em que pode haver um único jogador com um número ímpar de pontos são aqueles que têm, no total, um número ímpar de pontos. Há, portanto, dois casos possíveis: 6 jogadores com um total de 15 pontos, ou 7 jogadores com um total de 21 pontos.

   O quinto e o sexto jogadores não podem ter tido ambos 0 pontos, uma vez que no jogo entre eles, o vencedor ganhou 1 ponto.

   Logo o quinto jogador teve pelo menos 2 pontos, o João teve pelo menos 3 pontos e os três primeiros classificados tiveram pelo menos 4 pontos cada. Portanto, estes jogadores tiveram, no total, pelo menos $4 + 4 + 4 + 3 + 2 = 17$ pontos. Assim, o caso com 6 jogadores e um total de 15 pontos não é possível.

   Se o torneio teve 7 jogadores, então é possível o João ter ficado em quarto lugar, se os resultados tiverem sido os seguintes:

   Os três primeiros classificados ganharam, entre si, um confronto cada um (A ganhou a B, B ganhou a C e C ganhou a A), perderam no confronto contra o João e ganharam contra os três últimos classificados, ficando assim com 4 pontos cada.

   Os três últimos classificados também ganharam, entre si, um confronto cada um e ganharam no confronto contra o João, ficando assim com 2 pontos cada.

   O João ficou com 3 pontos, ou seja, em quarto lugar.

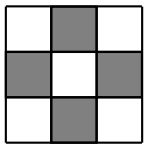
   Portanto, o torneio teve 7 jogadores.

   Nota: Também é possível o João ter ficado em quarto lugar, com 3 pontos, e as pontuações dos restantes participantes ter sido $6, 4, 4, 2, 2, 0$.

4. Comece-se por fazer algumas observações iniciais sobre os algarismos de um múltiplo de 4. Se um número n se escreve com os três algarismos a, b e c, por esta ordem, então o número é igual a $100a + 10b + c$. Como 100 é múltiplo de 4, então n é múltiplo de 4 se e só se o número de dois algarismos $10b + c$ é múltiplo de 4. Além disso,

   - Se b é par (ou seja, se b é $0, 2, 4, 6$ ou 8), então $10b$ é múltiplo de 4. Portanto n é múltiplo de 4 se e só se c também o é (ou seja, se e só se c for $0, 4$ ou 8).
   - Se b é ímpar (ou seja, se b é $1, 3, 5, 7$ ou 9), então $10b$ é par mas *não* é múltiplo de 4. Portanto n é múltiplo de 4 se e só se c for par mas não for múltiplo de 4 (ou seja, se e só se c for 2 ou 6).

   Veja-se agora dois casos, conforme o algarismo que o Marcelo escolher para a casa central do tabuleiro.



SOLUÇÕES

- Se esse algarismo for ímpar, então, pela observação anterior, todos os algarismos nas casas assinaladas na figura anterior têm que ser iguais a 2 ou a 6. Cada um dos algarismos das casas nos cantos tem de ser o algarismo das unidades de um múltiplo de 4 em que o algarismo das dezenas é par; portanto, pela observação anterior tem de ser igual a 0, 4 ou 8. Neste caso há, assim, 5 hipóteses para o algarismo da casa do meio, 2 hipóteses para o algarismo de cada uma das casas assinaladas e 3 hipóteses para o algarismo de cada casa num canto. Há assim, neste caso, um total de $5 \times 2^4 \times 3^4$ maneiras de preencher o tabuleiro.
- Se esse algarismo for par, então, pela observação anterior, todos os algarismos nas casas assinaladas na figura anterior têm que ser iguais a 0, 4 ou 8. Cada um dos algarismos das casas nos cantos tem de ser o algarismo das unidades de um múltiplo de 4 em que o algarismo das dezenas é par; portanto, pela observação anterior tem de ser igual a 0, 4 ou 8. Neste caso há, assim, 5 hipóteses para o algarismo da casa do meio, 3 hipóteses para o algarismo de cada uma das casas assinaladas e 3 hipóteses para o algarismo de cada casa num canto. Há assim, neste caso, um total de $5 \times 3^4 \times 3^4$ maneiras de preencher o tabuleiro.

O número de maneiras de preencher o tabuleiro é, assim,

$$5 \times (2^4 + 3^4) \times 3^4 = 39285.$$

SOLUÇÕES