XLIII OPM - Final - 2º Dia - 05.04.2025 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. A soma dos algarismos do número escolhido pela Matilde é menor ou igual a 36. Até 36, os números que deixam resto 5 quando dividido por 7 são 5, 12, 19, 26 e 33. Entre estes, somente o 33 deixa resto 3 quando dividido por 6. Logo a soma dos algarismos do número escolhido pela Matilde é 33.

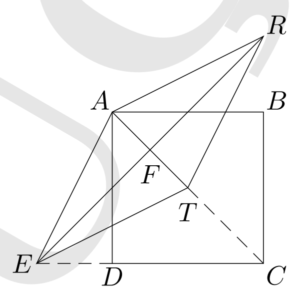
   Se o número escolhido pela Matilde tiver um 8, os outros três algarismos somam 25 e nenhum deles é 8, tendo que ser 7, 9 e 9. Para contar o número de números com estes algarismos, comecemos por ver que existem 4 possibilidades para o algarismo 8 e depois de escolher a posição deste existem, 3 possibilidades para o algarismo 7, ficando o resto do número determinado. Logo existem $4 \times 3 = 12$ números com estes algarismos.

   Se o número escolhido pela Matilde tiver três 8, o último algarismo é $33 - 3 \times 8 = 9$. O número de números que obedecem a isto é 4, uma vez que basta escolher a posição do algarismo 9.

   No total, na perspetiva do Leonardo, ainda existem 16 possibilidades para o número pensado pela Matilde.

5. A área do losango $[ARTE]$ é igual a $\dfrac{\overline{ER} \times \overline{AT}}{2}$. Uma vez que $[AC]$ é uma diagonal do quadrado, pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AT} = \dfrac{\overline{AC}}{2} = \dfrac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \sqrt{2}$ cm.

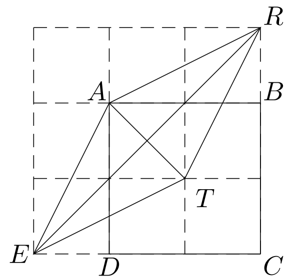
   Solução 1: Seja F o ponto de interseção das diagonais do losango (também ponto médio de $[AT]$).



   As diagonais do losango intersetam-se perpendicularmente, logo o triângulo $[EFC]$ é retângulo em F e é isósceles uma vez que $F\widehat{C}E = 45°$. Portanto, $\overline{FE} = \overline{FC} = \dfrac{3}{4} \times 2\sqrt{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ e $\overline{ER} = 2\overline{FE} = 3\sqrt{2}$. A área do losango é igual a $\dfrac{\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 3$ cm^2.

SOLUÇÕES

Solução 2: Ao colocar a figura num quadriculado de lado 1 cm, observa-se que as diagonais do losango seguem as diagonais do quadriculado.



Conclui-se assim que $\overline{ED} = 1$ e $\overline{ER} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$. A área do losango é igual a $\dfrac{\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 3$ cm^2.

6. Chame-se A e B às duas equipas. Vai-se fazer as seguintes duas observações:

   (a) Ao longo do torneio, a equipa que tem o jogador mais novo (que ainda não foi eliminado) é sempre a mesma;

   (b) A equipa que tem o jogador mais novo tem sempre o mesmo número de jogadores.

   Para justificar isso, veja-se o que acontece ao fim de cada partida. Suponhamos que, antes de uma partida, o jogador mais novo (chame-se-lhe Zé) está na equipa A. Agora veja-se dois casos:

   - Se o segundo jogador mais novo também estiver na equipa A, depois da partida o Zé é eliminado, e o segundo jogador mais novo passa a ser o mais novo, e está na equipa A.
   - Se o segundo jogador mais novo estiver na equipa B, então é necessariamente o jogador mais novo da equipa B. Na partida, ele joga contra o Zé, e elimina o Zé, passando a ser o jogador mais novo do torneio, e ficando na equipa A.

   Isto justifica a observação (a). Desta forma, a equipa que tem o jogador mais novo é a equipa do jogador que perde em todas as partidas, e portanto tem em cada partida um jogador substituído por um jogador da outra equipa, mantendo o número de jogadores. Isto justifica a observação (b).

   Desta forma, a equipa vencedora termina com 3 jogadores precisamente se, inicialmente, a equipa que tem o jogador mais novo tiver 3 jogadores. O número de distribuições que respeitam essa propriedade é, assim, o número de maneiras de escolher 2 jogadores para além do jogador mais novo. Há 14 maneiras de escolher um jogador para além do mais novo, e 13 maneiras de escolher um segundo. No entanto, a ordem entre estes dois jogadores não importa, portanto o número de maneiras de escolher estes dois jogadores é $\frac{14 \times 13}{2} = 91$.

   Há assim 91 maneiras em que os jogadores podem ter sido distribuídos inicialmente.

SOLUÇÕES