OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XLIII OPM - 2ª Eliminatória - 15.1.2025 - Categoria B - 10º/12º anos

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. **Solução 1:** Seja x o número de raspadinhas com prémio que o João comprou. Então, em x dos dias, o João ganhou 2 euros, e em $11-x$ dos dias o João perdeu 1 euro. Como o João começou com 2 euros e terminou com 0, conclui-se que $2+2x-(11-x)=0$, pelo que $x=3$. Assim, o João comprou 3 raspadinhas com prémio.

   Uma vez que inicialmente o João tinha 2 euros, teve pelo menos uma raspadinha com prémio nos dois primeiros dias. Tem-se então 2 situações:

   - Comprou apenas uma raspadinha com prémio num dos dois primeiros dias:
     Note-se que existem 2 possibilidades para o dia em que saiu esta raspadinha e, em ambos os casos, o João termina o dia 2 com 3 euros. A raspadinha com prémio seguinte terá sido comprada nos dias 3, 4 ou 5, ficando o João com 5, 4 ou 3 euros, respetivamente. Se o João tiver ficado com 5 euros existem 5 possibilidades para o dia em que comprou a terceira raspadinha com prémio (cada um dos 5 dias seguintes). Se o João tiver ficado com 4 euros (3 euros) existem 4 possibilidades (3 possibilidades) para o dia em que comprou a terceira raspadinha com prémio. Logo, nesta situação, existem $2\times(5+4+3)=24$ possibilidades para os dias com raspadinhas com prémio.
   - Comprou duas raspadinhas com prémio nos dois primeiros dias:
     Nesta situação, o João termina o dia 2 com 6 euros. A terceira raspadinha com prémio foi comprada entre os dias 3 e 8, inclusive, havendo então 6 possibilidades.

   Logo existem $24+6=30$ possibilidades para os dias em que o João comprou raspadinhas com prémio.

   Solução 2: Seja x o número de raspadinhas com prémio que o João comprou. Então, em x dos dias, o João ganhou 2 euros, e em $11-x$ dos dias o João perdeu 1 euro. Como o João começou com 2 euros e terminou com 0, conclui-se que $2+2x-(11-x)=0$, pelo que $x=3$.

   Suponha-se que, quando o João compra a segunda raspadinha com prémio, o João fica com k euros. Então o João só vai comprar mais uma raspadinha com prémio a partir daí, e isso pode acontecer em cada um dos k dias a partir desse. No diagrama seguinte estão representadas todas as possibilidades para a variação da quantidade de dinheiro, em euros, que o João tem até à altura em que obtém a sua segunda raspadinha com prémio.

$$
\begin{tikzcd}
 & & 6 & & & \\
2 \arrow[r] \arrow[dr] & 4 \arrow[ur] \arrow[r] & 3 \arrow[r] \arrow[dr] & 5 & 4 & 3 \\
 & 1 \arrow[r] & 3 \arrow[dr] \arrow[ddr] & 2 \arrow[ur] \arrow[r] & 1 \arrow[ur] & \\
 & & & 5 & 4 & 3 \\
 & & & 2 \arrow[ur] \arrow[r] & 1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

   Pela observação anterior, conclui-se que a resposta ao problema é a soma dos números nas extremidades de cada um dos caminhos possíveis, ou seja, $6+5+4+3+5+4+3=30$.

2. Como $2025 = 3^4 \times 5^2$, tem-se $2025^{1000} = 3^{4000} \times 5^{2000}$.

   Para qualquer número inteiro $k > 1$, o número $3^k \times 5^{2000}$ não é divisível por 2, mas é divisível por 3. Assim, o seu maior divisor próprio é $\frac{3^k \times 5^{2000}}{3} = 3^{k-1} \times 5^{2000}$. Portanto, se no visor da calculadora estiver escrito o número $3^k \times 5^{2000}$, após se carregar no botão $\triangle$ a calculadora passa a mostrar o número

$$3^k \times 5^{2000} - 3^{k-1} \times 5^{2000} = 2 \times 3^{k-1} \times 5^{2000}.$$

   O maior divisor próprio de $2 \times 3^{k-1} \times 5^{2000}$ é $3^{k-1} \times 5^{2000}$. Portanto, após se carregar outra vez no botão $\triangle$, a calculadora passa a mostrar o número

$$2 \times 3^{k-1} \times 5^{2000} - 3^{k-1} \times 5^{2000} = 3^{k-1} \times 5^{2000}.$$

   Em suma, se a calculadora mostrar o número $3^k \times 5^{2000}$, após se carregar duas vezes no botão $\triangle$ a calculadora passa a mostrar o número $3^{k-1} \times 5^{2000}$. Logo, se a calculadora mostrar o número $3^{4000} \times 5^{2000}$, após se carregar $4000 \times 2 = 8000$ vezes no botão $\triangle$ a calculadora passa a mostrar o número 5^{2000}.

   Para qualquer número inteiro $k > 1$, o número 5^k não é divisível por 2, 3 ou 4, mas é divisível por 5. Assim, o seu maior divisor próprio é $\frac{5^k}{5} = 5^{k-1}$. Portanto, se no visor da calculadora estiver escrito o número 5^k, após se carregar no botão $\triangle$ a calculadora passa a mostrar o número

$$5^k - 5^{k-1} = 4 \times 5^{k-1}.$$

   O maior divisor próprio de $4 \times 5^{k-1}$ é $2 \times 5^{k-1}$. Portanto, após se carregar outra vez no botão $\triangle$, a calculadora passa a mostrar o número

$$4 \times 5^{k-1} - 2 \times 5^{k-1} = 2 \times 5^{k-1}.$$

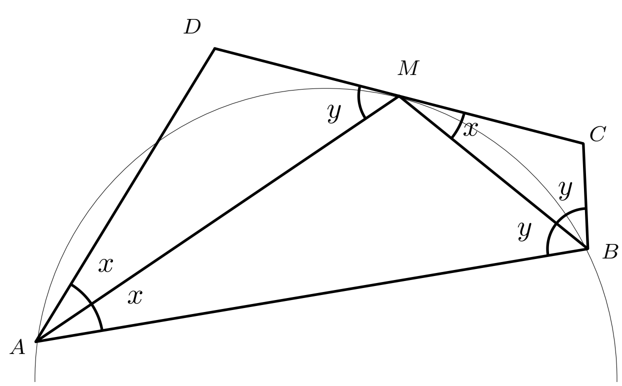
   O maior divisor próprio de $2 \times 5^{k-1}$ é 5^{k-1}. Portanto, após se carregar outra vez no botão $\triangle$, a calculadora passa a mostrar o número

$$2 \times 5^{k-1} - 5^{k-1} = 5^{k-1}.$$

   Em suma, se a calculadora mostrar o número 5^k, após se carregar três vezes no botão $\triangle$ a calculadora passa a mostrar o número 5^{k-1}. Logo, se a calculadora mostrar o número 5^{2000}, após se carregar $2000 \times 3 = 6000$ vezes no botão $\triangle$ a calculadora passa a mostrar o número 1.

   Logo, o André tem de carregar $8000 + 6000 = 14000$ vezes no botão $\triangle$ para fazer aparecer o número 1.

3. Seja $2x$ a amplitude do ângulo DAB e $2y$ a amplitude do ângulo ABC. Então, $M\hat{B}C = A\hat{B}M = y$ e $D\hat{A}M = M\hat{A}B = x$. O ângulo CMB tem um lado tangente à circunferência e contém o arco BM, logo a sua amplitude é x. Analogamente, o ângulo DMA tem um lado tangente à circunferência e contém o arco AM, logo a sua amplitude é y. Portanto, os triângulos $[BMC]$, $[MAD]$ e $[BAM]$ são semelhantes pelo critério AA.



   Solução 1: Da semelhança entre os triângulos $[BMC]$ e $[BAM]$ tem-se $\frac{\overline{MC}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}$ logo

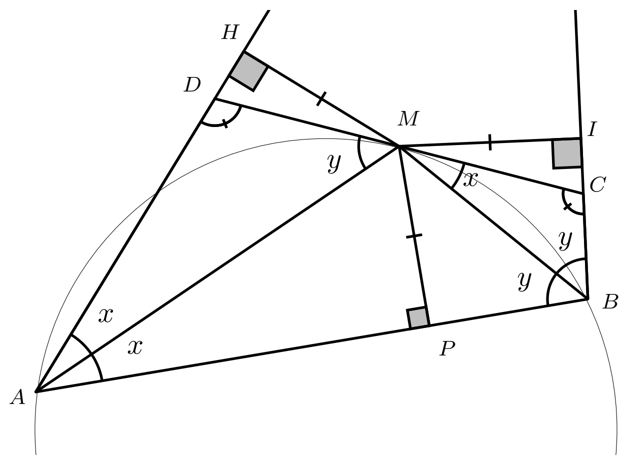
$$\overline{MC} = \frac{\overline{AM}\,\overline{MB}}{\overline{AB}}.$$

Da semelhança entre os triângulos $[MAD]$ e $[BAM]$ tem-se $\dfrac{\overline{MD}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ logo

$$\overline{MD} = \frac{\overline{MB}\,\overline{AM}}{\overline{AB}}.$$

Portanto, $\overline{MC} = \overline{MD}$ e M é o ponto médio de $[DC]$.

Solução 2: Sejam H, I e P os pés das perpendiculares por M a AD, BC e AB respetivamente. Sendo M um ponto pertencente às bissetrizes dos ângulos BAD e CBA , M é equidistante dos lados desses ângulos, ou seja, $\overline{MH} = \overline{MP}$ e $\overline{MP} = \overline{MI}$, logo $\overline{MH} = \overline{MI}$.



Da semelhança entre os triângulos $[BMC]$ e $[MAD]$ tem-se que os ângulos MDA e BCM são congruentes, logo os seus suplementares, os ângulos MDH e MCI também são congruentes. Assim, os triângulos $[MHD]$ e $[MIC]$ são congruentes pelo critério ALA. Desta congruência tem-se $\overline{MC} = \overline{MD}$ e, portanto, M é o ponto médio de $[DC]$.

4. As diferenças positivas entre elementos do conjunto $\{0, 1, 3\}$ são

$$1 - 0 = 1, \quad 3 - 1 = 2, \quad 3 - 0 = 3,$$

pelo que $\{0, 1, 3\}$ é um conjunto espaçado com 3 elementos. As diferenças positivas entre elementos do conjunto $\{0, 1, 4, 6\}$ são

$$1 - 0 = 1, \quad 6 - 4 = 2, \quad 4 - 1 = 3, \quad 4 - 0 = 4, \quad 6 - 1 = 5, \quad 6 - 0 = 6,$$

pelo que $\{0, 1, 4, 6\}$ é um conjunto espaçado com 4 elementos.

Suponha-se agora que existe um conjunto espaçado S com $n \geq 5$ elementos. Sejam a e b o menor e o maior elemento de S, respetivamente. Seja $m = \frac{n(n-1)}{2}$ o número de diferenças positivas diferentes entre dois elementos de S; note-se que $m \geq 10$.

A maior diferença entre dois elementos de S é $b - a$. Como S é espaçado, a segunda maior diferença é $b - a - 1$, e existem elementos c e d de S tais que $d - c = b - a - 1$. Se $c \neq a$ e $d \neq b$, então

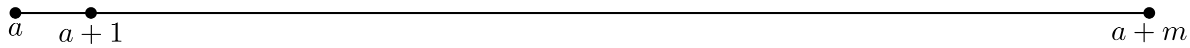
$$d - c < d - a < b - a,$$

o que é impossível, pois está-se a supor que $d - c$ é a segunda maior diferença entre dois elementos de S. Logo $c = a$ ou $d = b$. Se $c = a$, trocando S pelo conjunto dos simétricos dos elementos de S obtém-se um conjunto com as mesmas diferenças mas para o qual se teria $d = b$. Logo pode-se supor que $d = b$. Como $d - c = b - a - 1$, obtém-se que $c - a = 1$. Então 1 é a menor diferença positiva entre dois elementos de S: se não fosse, então a diferença positiva imediatamente anterior seria $1 - 1 = 0$, o que é absurdo.

Conclui-se que as diferenças positivas entre elementos de S são precisamente $1, 2, \ldots, m$. Além disso:

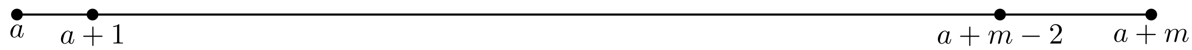
- Como $c - a = 1$, o número $a + 1$ pertence a S;

- Todos os elementos de S são da forma $a+k$, para algum inteiro k entre 1 e m (e o maior deles é $a+m$);
- Os números $a+2$ e $a+m-1$ não estão em S, pois, se estivessem, a diferença 1 apareceria repetida: $1=(a+1)-a=(a+2)-(a+1)=(a+m)-(a+m-1)$.

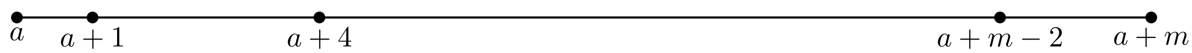


Observe-se agora o seguinte:

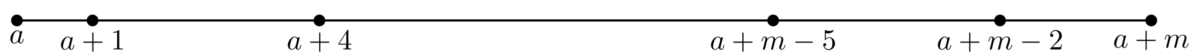
(a) Considere-se os dois elementos de S cuja diferença é $m-2$. Como estes são da forma $a+k$ com k inteiro entre 1 e m, estes só podem ser $a+m$ e $a+2$, ou $a+m-1$ e $a+1$, ou $a+m-2$ e a. Mas já se viu que $a+2$ e $a+m-1$ não estão em S, logo estes são $a+m-2$ e a. Portanto $a+m-2$ está em S.



(b) Considere-se os dois elementos de S cuja diferença é $m-4$. Estes só podem ser $a+m$ e $a+4$, ou $a+m-1$ e $a+3$, ou $a+m-2$ e $a+2$, ou $a+m-3$ e $a+1$, ou $a+m-4$ e a. Mas já se viu que $a+2$ e $a+m-1$ não estão em S. Além disso, $a+m-3$ também não está, pois, se estivesse, a diferença 1 apareceria repetida: $1=(a+1)-a=(a+m-2)-(a+m-3)$. E $a+m-4$ também não está em S, pois, se estivesse, a diferença 2 apareceria repetida: $2=(a+m)-(a+m-2)=(a+m-2)-(a+m-4)$. Assim, os dois elementos de S cuja diferença é $m-4$ são $a+m$ e $a+4$. Portanto $a+4$ está em S.



(c) Considere-se os dois elementos de S cuja diferença é $m-5$. Estes só podem ser $a+m$ e $a+5$, ou $a+m-1$ e $a+4$, ou $a+m-2$ e $a+3$, ou $a+m-3$ e $a+2$, ou $a+m-4$ e $a+1$, ou $a+m-5$ e a. No primeiro caso, a diferença 1 aparece repetida: $1=(a+1)-a=(a+5)-(a+4)$. O segundo caso é impossível, uma vez que já se viu que $a+m-1$ não está em S. No terceiro caso, a diferença 2 aparece repetida: $2=(a+m)-(a+m-2)=(a+3)-(a+1)$. O quarto caso é impossível, uma vez que já se viu que $a+2$ não está em S. No quinto caso, a diferença 4 aparece repetida: $4=(a+4)-a=(a+m)-(a+m-4)$. Portanto $a+m-5$ está em S. Como $m\geq 10$, os números $a+m-5$ e $a+1$ são diferentes. Mas então a diferença 3 aparece repetida: $3=(a+4)-(a+1)=(a+m-2)-(a+m-5)$.



Conclui-se assim que não existe nenhum conjunto espaçado com $n\geq 5$ elementos.

Portanto, os valores de $n\geq 3$ para os quais existe um conjunto espaçado com n elementos são $n=3$ e $n=4$.