

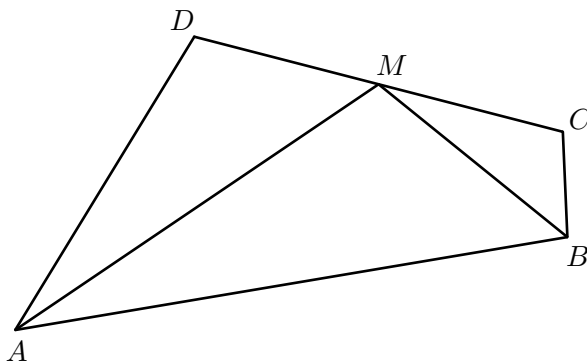
Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Na escola do João decidiram vender raspadinhas para angariar fundos para a viagem de finalistas. Cada raspadinha custa 1 euro. Algumas raspadinhas têm um prémio de 3 euros e não há outros prémios. No dia 1 de janeiro, o João tinha 2 euros e decidiu comprar uma raspadinha por dia, a partir desse dia, até ficar sem dinheiro. Sabendo que o João comprou 11 raspadinhas, quantas possibilidades existem para o conjunto dos dias em que o João comprou uma raspadinha com prémio?

2. A calculadora do André tem um botão especial Δ . Quando no visor da calculadora está escrito um número natural n , com $n > 1$, e se carrega no botão Δ , a calculadora passa a mostrar o número $n - d$, onde d é o maior divisor de n que é menor do que n . Por exemplo, quando no visor da calculadora estiver escrito o número 77 e se carregar no botão Δ , a calculadora passará a mostrar o número $77 - 11 = 66$.

No visor da calculadora está escrito o número 2025^{1000} . Quantas vezes é que o André tem de carregar no botão Δ para que o visor da calculadora passe a mostrar o número 1?

3. No quadrilátero $[ABCD]$, o ponto M pertence ao lado $[CD]$ e $\hat{A}M$ e $\hat{B}M$ são as bissetrizes dos ângulos BAD e CBA , respetivamente. A circunferência que contém os pontos A , B e M é tangente, no ponto M , ao lado $[CD]$ do quadrilátero. Prova que M é o ponto médio de $[CD]$.



4. Dado um conjunto de n números reais, com $n \geq 3$, calcula-se, para cada par de números do conjunto, a diferença entre o maior e o menor. Por exemplo, dado o conjunto $\{-\frac{3}{2}, \pi, 7\}$, obtêm-se os números $\pi + \frac{3}{2}$, $\frac{17}{2}$ e $7 - \pi$.

Um conjunto diz-se *espaçado* se os números obtidos desta maneira são todos diferentes e podem ser escritos numa sequência de tal maneira que cada número, a partir do segundo, é igual à soma do anterior com 1.

Determina todos os valores de n , com $n \geq 3$, para os quais existe um conjunto espaçado com n elementos.