OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

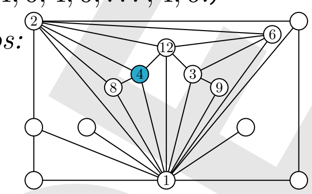
XLIII OPM - 2ª Eliminatória - 15.1.2025 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1: cada opção correta: 4 pontos cada opção errada: -1 ponto Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção E. (*Cada palito mede* $x = 7,5$ *cm pois o perímetro é dado por* $40 = 4 \times x + 2 \times 5$.)

   (b) Opção A. (*O algarismo das unidades das parcelas é* $1, 4, 6, 4, 6, \ldots, 4, 6$.)

   (c) Opção C. (*As seguintes posições têm números definidos:* 

.)

   (d) Opção D. (*Há* 3 *posições para a parcela maior e* 2 *escolhas para o sinal de cada variável.*)

2. Podemos concluir que:

   - A **Marisa** mora em **Faro**, por hipótese.
   - A **Olga** mora na **Guarda** porque a Leonor e a Noémia não moram e a Marisa mora em Faro.
   - O **Bruno** mora em **Faro**, como a Marisa, porque não mora na mesma cidade que a Leonor, que a Noémia/Alberto e que a Olga (que não mora nem em Faro nem em Évora)
   - O **Diogo** mora na **Horta**, porque não mora em Évora, em Faro (onde mora o Bruno) e na Guarda (onde mora a Olga).
   - A **Leonor** também mora na **Horta**, como o Diogo, porque o Diogo não mora na mesma cidade que Marisa/Bruno, Noémia/Alberto e Olga.
   - O **Carlos** mora na **Guarda**, como a Olga, porque não mora na mesma cidade que a Leonor/Diogo, Marisa/Bruno e Noémia/Alberto.
   - A **Noémia** e o **Alberto** moram na cidade restante, **Évora**.

3. Comecemos por notar que, como os ângulos $A\widehat{E}F$, $A\widehat{E}D$ e $B\widehat{E}D$ são iguais e a sua soma é $180°$, cada um deles mede $60°$.

   Relativamente ao triângulo $[AED]$, sabemos que $E\widehat{A}D = 20°$ e que $A\widehat{E}D = 2 \times 60 = 120°$, pelo que $E\widehat{D}A = 40°$.

   Como $\overline{AD} = \overline{DF}$, o triângulo $[ADF]$ é isósceles e, portanto, $D\widehat{F}A = D\widehat{A}F = \frac{180° - 40°}{2} = 70°$.

   Os triângulos $[AEF]$ e $[AEB]$ são congruentes pelo critério LAL, pelo que $A\widehat{B}E = A\widehat{F}E = 70°$. Segue-se que $E\widehat{B}C = 180° - A\widehat{B}E = 110°$.

   Considerando agora o triângulo $[BEC]$, temos

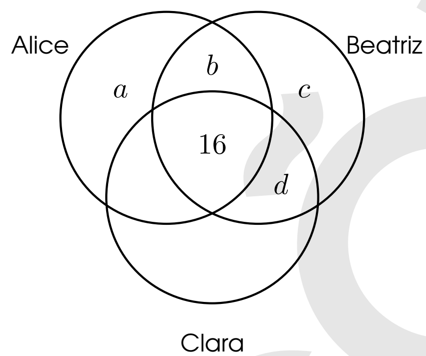
$$B\widehat{C}E = 180° - E\widehat{B}C - B\widehat{E}C = 180° - 110° - 60° = 10°.$$

4. Seja F o número de problemas fáceis, M o número de problemas médios e D o número de problemas difíceis. Como todos os problemas foram resolvidos, então $F + M + D = 100$. Além disso, $M = 3F$.

Se somarmos os problemas resolvidos por cada uma das amigas obtemos, por um lado, o número $70+60+50 = 180$ e, por outro, o número $D + 2M + 3F$.

Logo $180 = (100 - F - M) + 2M + 3F = 100 + M + 2F = 100 + 5F$, ou seja, $F = 16$. Portanto $M = 48$ e $D = 36$.

Sejam a, b, c, d o número de problemas resolvidos pela Alice e a Beatriz de acordo com o diagrama seguinte:



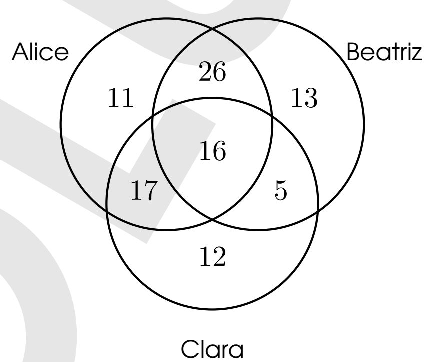
A soma $a+b+c$ representa o número de problemas que a Clara não resolveu, ou seja, $a+b+c = 100-50 = 50$.

A soma $b+c+d$ representa o número de problemas médios e difíceis resolvidos pela Beatriz, ou seja, $b+c+d = 60 - 16 = 44$.

Como $b + c$ é comum às duas somas, então $a - d = 50 - 44 = 6$.

Como a Alice foi a amiga que resolveu menos problemas difíceis, então resolveu menos que $36/3 = 12$ problemas difíceis. Logo $a \leq 11$ e portanto, $d \leq 5$.

Para ver que é possível que a Beatriz e a Clara tenham resolvido 5 problemas médios, observemos que o seguinte diagrama cumpre todas condições do problema.



Portanto, o número máximo de problemas médios resolvidos pela Beatriz e pela Clara é 5.