XLIII OPM - 1ª Eliminatória - 6.11.2024 - Categoria B - 10º/12º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D). (*Há* 121 *faces viradas para baixo,* 121 *para cima e* 36 *para cada um dos outros lados.*)
   (b) Opção D). (*As caixas têm* $n + 2n + 4n + \cdots + 64n = 127n \leq 2024$ *moedas, logo* $n \leq 15$.)
   (c) Opção A). ($\overline{AM} = 3$; $[FCG]$ *é semelhante a* $[BMC]$, *logo* $\overline{AE} = 2$, $\overline{EG} = 4$. *A área é* $\frac{(3+4)}{2} \times 2$.)
   (d) Opção D). (1 *com o algarismo* 8; 12 *com os algarismos* $1, 1, 2, 4$; 10 *com os algarismos* $1, 1, 2, 2, 2$.)

2. **Solução 1:** Como o triângulo $[ABD]$ é retângulo em A e $\overline{AD} = \overline{AB} = 2$, tem-se, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{BD}^2 = 2^2 + 2^2 = 8.$$

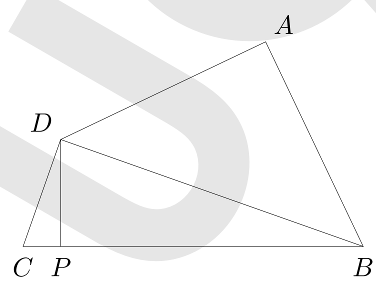
Assim, temos

$$\overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 = 1 + 8 = 9 = \overline{BC}^2.$$

Pelo recíproco do Teorema de Pitágoras, conclui-se que o triângulo $[BCD]$ é retângulo em D. Os triângulos $[CDP]$ e $[CBD]$ são semelhantes, pois têm o ângulo BCD em comum e $D\widehat{P}C = B\widehat{D}C = 90°$. Logo,

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}},$$

e como $\overline{CD} = 1$ e $\overline{CB} = 3$ conclui-se que $\overline{CP} = \dfrac{1}{3}$.



Solução 2: Como o triângulo $[ABD]$ é retângulo em A e $\overline{AD} = \overline{AB} = 2$, tem-se, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{BD}^2 = 2^2 + 2^2 = 8.$$

Seja $x = \overline{PC}$. Então $\overline{BP} = 3 - x$. Pelo Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos $[BPD]$ e $[CPD]$, temos

$$\overline{PD}^2 = 1 - x^2 \quad \text{e} \quad \overline{PD}^2 = 8 - (3 - x)^2.$$

Logo $1 - x^2 = 8 - (3 - x)^2$, ou seja, $x = \dfrac{1}{3}$.

3. Em primeiro lugar, observemos que as caricas azuis se repetem de três em três posições. Se uma carica é azul (A), então a seguinte ou é encarnada (E) ou é verde (V), pela regra (i), e a seguinte ou é verde ou é encarnada, respetivamente, pela regra (ii). Temos então uma sequência AVE ou AEV, e novamente pela regra (ii) a carica seguinte tem que ser azul. Isto mostra também que a primeira carica azul está numa das três primeiras posições.

   Vamos ver então de quantas maneiras podemos escolher as caricas em cada um dos três casos.

   Se primeira carica é azul, então as caricas nas posições $3k+1$ com k entre 1 e $n-1$ também são azuis, e os pares de caricas que estão entre duas caricas azuis e o par que está no final da sequência são da forma VE ou EV. Portanto, neste caso, há duas maneiras de escolher cada um destes pares e 2^n maneiras diferentes de escolher as caricas.

   Se a carica na terceira posição é azul, então, de modo análogo, concluímos que há 2^n maneiras diferentes de escolher as caricas.

   Se a segunda carica é azul, então as caricas nas posições $3k+2$ com k entre 1 e $n-1$ também são azuis, e há 2^{n-1} maneiras de escolher os pares de caricas que estão entre duas caricas azuis. A primeira e a última caricas podem ser encarnadas ou verdes. Neste caso há $2^{n-1} \times 2 \times 2 = 2^{n+1}$ maneiras diferentes de escolher as caricas.

   Logo, o Carlitos pode escolher as caricas de $2^n + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2}$ maneiras diferentes.

4. Se um número não é olímpico e tiver algum algarismo a inferior a 7, então o número que se obtém substituindo a por $a+3$ também não é olímpico. Portanto, o maior número que não é olímpico tem apenas os algarismos $7, 8$ ou 9.

   Seja N o maior número que não é olímpico. Se N tiver algum algarismo 7 e algum algarismo 8, estes não podem ser consecutivos, pois formam um número múltiplo de 3. Consideremos os dois algarismos 7 e 8 mais próximos em N. Então entre eles está um ou mais algarismos 9 e o número formado por todos estes algarismos (incluindo o 7 e o 8) é múltiplo de 3.

   Assim, N só pode ter algarismos 9, ou 7 e 9 ou 8 e 9. Além disso, N não pode ter dois algarismos 9 consecutivos.

   No primeiro caso, N tem apenas um algarismo, logo $N = 9$.

   No segundo caso, N tem no máximo dois algarismos 7, pois tivesse três, o número formado pelos algarismos de N desde o primeiro 7 até ao terceiro seria múltiplo de 3. Portanto, neste caso, o maior número é 97979.

   O terceiro caso é análogo e o maior número nestas condições é 98989.

   Assim, o maior número que não é olímpico é 98989.