XLII OPM - Final - 2º Dia - 23.03.2024 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) A soma mais pequena que se pode obter é $1+2+3=6$ e a maior é $4+5+6=15$. Resta verificar que se podem obter todas as somas entre 6 e 15. Tem-se $7=1+2+4$, $8=1+2+5$, $9=1+2+6$, $10=2+3+5$, $11=2+3+6$, $12=3+4+5$, $13=3+4+6$, $14=3+5+6$. Portanto, há 10 somas diferentes que se podem obter. Opção correta: B)

   (b) A cruz verde é constituída por 5 quadrados pequenos. Além da cruz, no quadrado grande há mais 3 quadrados pequenos (quatro metades e quatro quartos), logo o quadrado grande tem 8 quadrados pequenos..

   O perímetro da cruz é igual a 12 vezes o lado de um dos quadrados pequenos, por isso o lado de cada quadrado pequeno mede 2 cm. Portanto, a área do quadrado grande é $8\times 2\times 2=32$ cm^2. Opção correta: B)

   (c) O mínimo múltiplo comum entre todos os números naturais desde 1 até 15 é $2^3\times 3^2\times 5\times 7\times 11\times 13$, pelo que das opções apresentadas só pode ser múltiplo de $2^2\times 3^2\times 5$. Opção correta: D)

   (d) Um número é múltiplo de 9 se a soma dos seus algarismos for múltipla de 9. Se o número também tem de ser múltiplo de 6 terá de ser um número par (porque sendo múltiplo de 9 já é múltiplo de 3). Vamos procurar os números pares (terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8) múltiplos de 9 com três algarismos distintos.

   Para números que terminam em 0, a soma dos outros dois algarismos (que não podem ser 0) tem de ser 9 (não pode ser 18 porque seriam ambos 9 logo não eram distintos). Temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 18, 81, 27, 72, 36, 63, 45, 54. Ou seja, temos 8 números nestas condições.

   Para números que terminam em 2, a soma dos outros dois algarismos (distintos de dois) tem de ser 7 ou 16. Se a soma é 7, temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 70, 16, 61, 34, 43. Se a soma é 16, temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 79, 97. Ou seja, temos 7 números nestas condições.

   Para números que terminam em 4, a soma dos outros dois algarismos (distintos de quatro) tem de ser 5 ou 14. Se a soma é 5, temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 50, 23, 32. Se a soma é 14, temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 95, 59, 86, 68. Ou seja, temos 7 números nestas condições.

   Para números que terminam em 6, a soma dos outros dois algarismos (distintos de seis) tem de ser 3 ou 12. Se a soma é 3, temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 30, 12, 21. Se a soma é 12, temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 39, 93, 48, 84, 57, 75. Ou seja, temos 9 números nestas condições.

   Para números que terminam em 8, a soma dos outros dois algarismos (distintos de oito) tem de ser 1 ou 10. Se a soma é 1, temos a seguinte possibilidade para os algarismos das centenas e dezenas: 10. Se a soma é 10, temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 91, 19, 73, 37, 64, 46. Ou seja, temos 7 números nestas condições.

   Portanto, há $8+7+7+9+7=38$ números nestas condições. Opção correta A)

5. Podemos escrever

$$
\begin{aligned}
9+99+999+9999+\cdots+\overbrace{999\cdots 99}^{\text{2024 algarismos}} &= (10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+(10^{2024}-1)\\
&= (10+100+1000+\cdots+10^{2024})-(1+1+1+\cdots+1)\\
&= \overbrace{11\cdots 11}^{\text{2024 dígitos}}0-2024=\\
&= \overbrace{11\cdots 11}^{\text{2020 dígitos}}09086.
\end{aligned}
$$

Portanto, o número indicado tem 2020 dígitos iguais a 1.

6. Como com metade dos espetadores do primeiro jogo, o número de lugares vazios foi três vezes maior, então, no primeiro jogo, metade dos espetadores foi o mesmo que o dobro dos lugares vazios, ou seja, o número de espetadores foi o quádruplo dos lugares vazios.

   Logo, no primeiro jogo, o estádio tinha $4/5$ dos lugares ocupados e $1/5$ dos lugares vazios. No segundo jogo, o estádio tinha $2/5$ dos lugares ocupados e $3/5$ dos lugares vazios.

   No terceiro jogo, houve mais 500 espetadores, que corresponde a $1/2-2/5=1/10$ da lotação.

   Logo, o estádio tem 5000 lugares.